√ 5191

326

Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 33e année, nº 9-10, 1964, pp. 513-517

1
5
12

SUR LES NOMBRES PENTAGONAUX

W. SIERPIŃSKI
(*Varsovie*)

On appelle *pentagonal* un nombre de la forme $\omega_k = \dfrac{k(3k-1)}{2}$, où k est un entier positif.

Je démontrerai ici d'une façon élémentaire deux théorèmes concernant ces nombres.

THÉORÈME 1. — *Il existe une infinité de nombres pentagonaux qui sont triangulaires. Toutes les solutions en nombres naturels* (x, y) *de l'équation* $t_x = \omega_y$ $\left(\text{où } t_x = \dfrac{x(x+1)}{2}\right)$ *sont contenus dans la suite infinie* (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ *déterminée par les conditions :*

$$(1)\qquad x_1 = y_1 = 1,\ x_{n+1} = 7x_n + 12y_n + 1,\ y_{n+1} = 4x_n + 7y_n + 1 \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots$$

DÉMONSTRATION. —Nous démontrerons d'abord par l'induction que

$$(2)\qquad t_{x_n} = \omega_{y_n} \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

Cela est vrai pour $n = 1$, puisque $t_1 = \omega_1 = 1$. Supposons maintenant que la formule (2) est vraie pour un nombre naturel n. On a donc

$$(3)\qquad x_n(x_n + 1) = y_n(3y_n - 1)$$

Vu l'identité

$$(4x + 7y + 1)(12x + 21y + 2) - (7x + 12y + 1)(7x + 12y + 2) = \\ = y(3y - 1) - x(x + 1)$$

et vu les formules (1), on trouve pour $x = x_n$, $y = y_n$:

$$y_{n+1}(3y_{n+1} - 1) - x_{n+1}(x_{n+1} + 1) = y_n(3y_n - 1) - x_n(x_n + 1),$$

Manuscrit reçue le 15 octobre 1964.

donc, d'après (3), $t_{x_{n+1}} = \omega_{y_{n+1}}$. La formule (2) est donc démontrée par l'induction.

Vu que, d'après (1), $x_{n+1} > x_n$ et $y_{n+1} > y_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, il en résulte qu'il existe une infinité de nombres pentagonaux triangulaires.

D'après (1) on trouve $x_2 = 20$, $y_2 = 12$, $x_3 = 285$, $y_3 = 165$. On a donc $t_{20} = \omega_{12}$ et $t_{285} = \omega_{165}$.

Supposons maintenant qu'il existe une solution de l'équation $t_x = \omega_y$ en nombres naturels x et y telle que le système (x, y) n'est pas contenu dans la suite (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ et soit x le plus petit de tels nombres naturels x. On n'a pas donc $x = 1$, donc $x > 1$. Soit

(4) $$u = 7x - 12y + 5 \text{ et } v = 7y - 4x - 3$$

Nous démontrerons que u et v sont des nombres naturels et que
$$u < x.$$

S'il était $u = 0$, on aurait $7x + 5 = 12y$, donc, d'après l'identité

(5) $$(7y-4x-3)(21y-12x-10)-(7x-12y+5)(7x-12y+6) = \\ = y(3y-1) - x(x+1)$$

et vu que $t_x = \omega_y$, on aurait $(7y - 4x - 3)(21y - 12x - 10) = 0$ et, comme $21y - 12x - 10 \neq 0$ (puisque $3 \nmid 10$), on aurait $7y = 4x + 3$ et, comme $7x + 5 = 12y$, on trouverait $x = 1$, contrairement à l'hypothèse. S'il était $u < 0$, donc $u \leqslant -1$, on aurait $7x - 12y + 6 \leqslant 0$, donc $x \leqslant \dfrac{12y - 6}{7}$ et $x + 1 \leqslant \dfrac{12y + 1}{7}$, d'où
$$x(x + 1) \leqslant \frac{144y^2 - 60y - 6}{49} < \frac{147y^2 - 49y}{49} = y(3y - 1),$$
contrairement à l'hypothèse que $t_x = \omega_y$.

On a donc $u > 0$.

S'il était $v \leqslant 0$, donc $7y \leqslant 4x + 3$, on aurait $y \leqslant \dfrac{4x + 3}{7}$,
$$3y - 1 \leqslant \frac{12x + 2}{7}, \text{ d'où } y(3y - 1) \leqslant \frac{48x^2 + 44x + 6}{49} < x^2 + x,$$
puisque, vu que $x > 1$, on a $6 < x^2 + 5x$. On aurait donc une contradiction avec l'hypothèse que $t_x = \omega_y$.

On a donc $v > 0$.

S'il était $u \geqslant x$, on aurait $7x - 12y + 5 \geqslant x$, d'où $x \geqslant \dfrac{12y - 5}{6}$
$$\text{et} \quad x + 1 \geqslant \frac{12y + 1}{6}, \text{ donc } x(x + 1) \geqslant \frac{144y^2 - 48y - 5}{36} > \\ > 3y^2 - y = y(3y - 1),$$
contrairement à l'hypothèse que $t_x = \omega_y$.

Les nombres u et v sont donc naturels, $u < x$ et de $t_x = \omega_y$, (4) et (5) il résulte que $t_u = \omega_v$. Or, comme $u < x$, et vu la définition du nombre x, il en résulte que (u, v) est un terme de la suite (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, soit $u = x_k$, $v = y_k$, où k est un nombre naturel. D'après (1) il en résulte que $x_{k+1} = 7u + 12v + 1$ et $y_{k+1} = 4u + 7v + 1$.

Or, d'après (4) on trouve $7u + 12v + 1 = x$ et $4u + 7v + 1 = y$.

On aurait donc $x = x_{k+1}$ et $y = y_{k+1}$, contrairement à l'hypothèse que le système (x, y) n'est pas un terme de la suite (x_n, y_n) $(n=1,2,\ldots)$

Nous avons donc démontré que la suite (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ contient toutes les solutions de l'équation $t_x = \omega_y$ en nombres naturels x et y. Le théorème 1 est ainsi démontré.

M. A. Rotkiewicz a remarqué qu'il résulte sans peine de notre théorème 1ce.

Corollaire. — *Il existe une infinité des nombres pentagonaux qui sont en même temps hexagonaux* (c.-à-d. de la forme $k(2k - 1)$, où $k = 1, 2, \ldots$)

Démonstration. — Des formules (1) résultent sans peine les formules recursives suivantes :

$x_1 = 1$, $x_2 = 20$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n + 6$ pour $n = 1, 2, \ldots$,

$y_1 = 1$, $y_2 = 12$, $y_{n+2} = 14y_{n+1} - y_n - 2$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Il résulte tout de suite de ces formules par l'induction que les nombres x_{2l+1} $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ sont tous impairs, donc $x_{2l+1} = 2k - 1$, où k est un nombre naturel. On a donc $t_{x_{2l+1}} = k(2k - 1)$ ce qui est un nombre hexagonal.

Les nombres pentagonaux $\omega_{y_{2l+1}} = t_{x_{2l+1}} = k(2k - 1)$ sont donc hexagonaux pour $l = 0, 1, 2, \ldots$

Théorème 2. — *Il existe une infinité de nombres pentagonaux qui sont carrés. Toutes les solutions de l'équation $\omega_y = x^2$ en nombres naturels x et y sont contenus dans la suite infinie (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ déterminée par les conditions :*

(6) $x_1 = y_1 = 1$, $x_{n+1} = 49x_n + 60y_n - 10$, $y_{n+1} = 40x_n + 49y_n - 8$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord par l'induction que

(7) $$\omega_{y_n} = x_n^2 \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

Cela est vrai pour $n = 1$. Supposons maintenant que la formule (7) est vrai pour un nombre naturel n. On a donc

$$y_n(3y_n - 1) = 2x_n^2. \tag{8}$$

Vu l'identité

$$(40x + 49y - 8)(120x + 147y - 25) - 2(49x + 60y - 10)^2 = \\ = y(3y - 1) - 2x^2$$

et vu les formules (6) on trouve

$$y_{n+1}(3y_{n+1} - 1) - 2x_{n+1}^2 = y_n(3y_n - 1) - 2x_n^2$$

donc, d'après (8) : $\omega_{y_{n+1}} = x_{n+1}^2$. La formule (7) est ainsi démontrée par l'induction.

Vu que, d'après (6), $x_{n+1} > x_n$ et $y_{n+1} > y_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, il en résulte qu'il existe une infinité de nombres pentagonaux carrés. D'après (6) on trouve $x_2 = 99$, $y_2 = 81$, $x_3 = 9701$, $y_3 = 7921$.

Supposons maintenant qu'il existe une solution de l'équation $\omega_y = x^2$ en nombres naturels x et y telle que le système (x, y) n'est pas contenu dans la suite (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ et soit x le plus petit de tels nombres naturels x. On n'a pas donc $x = 1$, donc $x > 1$.

Soit

$$u = 49x - 60y + 10, \quad v = 49y - 40x - 8. \tag{9}$$

On vérifie sans peine l'identité

$$(49y - 40x - 8)(147y - 120x - 25) - 2(49x - 40y + 10)^2 = \\ = y(3y - 1) - 2x^2. \tag{10}$$

S'il était $u = 0$, on aurait $49x - 60y + 10 = 0$ et, vu que $\omega_y = x^2$, on aurait, d'après (10), $(49y - 40x - 8)(147y - 120x - 25) = 0$. Or, comme $3 \nmid 25$, on a $147y - 120x - 25 \neq 0$, donc $49y - 40x - 8 = 0$, ce qui donne avec $49x - 60y + 10 = 0$, $x = -10$, ce qui est impossible. Or, s'il était $u \leqslant -1$, on aurait $49x - 60y + 10 \leqslant -1$, d'où $y \geqslant \dfrac{49x + 11}{60}$ et $3y - 1 \geqslant \dfrac{147x - 27}{60} = \dfrac{49x - 9}{20}$, donc

$$y(3y - 1) \geqslant \frac{49x + 11}{60} \cdot \frac{49x - 9}{20} = \frac{2401x^2 + 98x - 99}{1200} > 2x^2,$$

puisque $x > 1$. Le nombre u est donc naturel.

S'il était $v \leqslant 0$, on aurait

$$x \geqslant \frac{49y - 8}{40}, \text{ d'où } 2x^2 \geqslant \frac{2401y^2 - 784y + 64}{800}.$$

Or, vu que $y \neq 0$ (puisque $x > 1$), on a $2401y^2 - 784y + 64 > 2400y^2 - 800y = 800(3y^2 - y)$, d'où $2x^2 > y(3y - 1)$, contrairement à l'hypothèse que $\omega_y = x^2$. Le nombre v est donc naturel.

S'il était $u \geqslant x$, on aurait $49x - 60y + 10 \geqslant x$, donc

$$48x \geqslant 60y - 10 \quad \text{et} \quad x \geqslant \frac{30y - 5}{24},$$

d'où $2x^2 \geqslant \dfrac{900y^2 - 300y + 25}{288}$ et, comme $900y^2 - 300y + 25 > 864y^2 - 288y = 288y(3y - 1)$, on aurait $2x^2 > y(3y - 1)$, contrairement à l'hypothèse que $\omega_y = x^2$. On a donc $u < x$.

Vu les formules (9) et (10) et vu que $\omega_y = x^2$, on a $\omega_v = u^2$. Vu la définition du nombre x, il en résulte que (u, v) est un terme de la suite (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, donc $u = x_k$, $v = y_k$, où k est un nombre naturel. Or, d'après (9) on trouve $49u + 60v - 10 = x$ et

$$40u + 49v - 8 = y.$$

On aurait donc, d'après (6), $x = x_{k+1}$ et $y = y_{k+1}$, contrairement à l'hypothèse que le système (x, y) n'est pas un terme de la suite (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$. Le théorème 2 est ainsi démontré.

Il se pose le problème s'il existe des nombres pentagonaux > 1 qui sont en même temps triangulaires et carrés. M. A. Rotkiewicz a démontré que si tels nombres existent, leur nombre est fini.