

Scan

A5700
etc

⊕ Gougen-B

several segs

5700
5701
5568
108

112

LNM
1234 1986

CHEMINS SOUS-DIAGONAUX ET TABLEAUX DE YOUNG

Dominique GOUYOU-BEAUCHAMPS
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
33405 TALENCE, France

Abstract :

We consider path in the lattice of positive integer coordinate, where the possible "moves" are of four kinds : (1) increasing the x coordinate by 1, (2) decreasing the x coordinate by 1, (3) increasing the y coordinate by 1, (4) decreasing the y coordinate by 1. The number of such paths of length ℓ , from (0,0) to any point whose y-coordinate is 0, lying below or touching the main diagonal, is $C_n C_{n+1}$ for $\ell=2n$ and $C_{n+1} C_{n+1}$ for $\ell=2n+1$ where C_n is the Catalan number. We give a bijective proof of this result. As corollary we give exact formulas for the number of standard Young tableaux having n cells and at most k rows in the cases k=4 and k=5.


A152958 →
A1246
A5568

I - Introduction.

Les nombres de Catalan $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ interviennent dans de très nombreuses formules d'énumération. Citons, entre autres, le nombre de façons de partager un polygone en triangles (Euler [8], Segner [21]), le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs (Rodrigues [21], Catalan [3]), le problème du scrutin (Bertrand [2]), les arbres dessinés (Harary, Prins, Tutte [15]), les chemins minimaux sous-diagonaux (André [1]). Plus récemment des formules d'énumération ont fait intervenir le produit de deux nombres de Catalan consécutifs $C_n C_{n+1}$ et le carré d'un nombre de Catalan $C_n C_n$. On rencontre ces nombres dans l'énumération de certaines familles de cartes planaires (Mullin [17], Tutte [18]) et dans l'énumération des permutations de Baxter alternantes (Dulucq [6], Cori, Dulucq, Viennot [5]).

Le principal résultat de cet article est d'établir que $C_n C_n$ et $C_n C_{n+1}$ énumèrent aussi une classe de chemins sous-diagonaux.

On appelle chemin une ligne polygonale dans le quart de plan des coordonnées entières constituée par une suite de points

chemin

A_0, A_1, \dots, A_n tels que A_0 soit l'origine et que les coordonnées (p_i, q_i) de A_i et (p_{i+1}, q_{i+1}) de A_{i+1} vérifient l'une des quatre conditions suivantes ($i=0, 1, \dots, n-1$) :

- (1) $p_{i+1} = p_i + 1$ et $q_{i+1} = q_i$ (pas Est) .
- (2) $p_{i+1} = p_i$ et $q_{i+1} = q_i + 1$ (pas Nord) .
- (3) $p_{i+1} = p_i - 1$ et $q_{i+1} = q_i$ (pas Ouest) .
- (4) $p_{i+1} = p_i$ et $q_{i+1} = q_i - 1$ (pas Sud) .

La longueur d'un tel chemin est n . Il peut être considéré comme non minimal car ce n'est pas forcément le chemin le plus court qui relie l'origine au point A_n . Il est dit sous-diagonal si pour $i=1, 2, \dots, n$ p_i est supérieur ou égal à q_i . Ces chemins sous-diagonaux ont été introduits par G. Viennot qui a conjecturé le résultat suivant qui est démontré ici :

Théorème 1 - Le nombre de chemins sous-diagonaux de longueur $2n$ dont l'extrémité terminale est sur l'axe des x est égal à $C_n C_{n+1}$. Le nombre de tels chemins de longueur $2n+1$ est égal à $C_{n+1} C_{n+1}$.

La preuve donnée ici est purement combinatoire. Elle utilise la notion classique de chemin minimal ou chemin de Dyck. Ce sont les chemins précédents qui n'utilisent pas les pas Ouest et Sud. Ainsi, dans le troisième paragraphe on construit une bijection entre les chemins sous-diagonaux et des paires de chemins minimaux sous-diagonaux et des paires de chemins minimaux sous-diagonaux reliant l'origine à un même point et ne se coupant pas.

pairs of non path

Le quatrième paragraphe démontre l'égalité du nombre de paires de chemins minimaux sous-diagonaux ne se coupant pas et du nombre de paires de chemins minimaux sous-diagonaux dont les longueurs sont les mêmes ou différent de 2. Ces deux bijections prouvent le théorème 1 car le nombre de chemins minimaux sous-diagonaux reliant l'origine au point (n, n) est égal à C_n .

Un corollaire de ce résultat est la démonstration combinatoire des deux identités suivantes :

$$(1) C_n C_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! (2n+2)! (2k+3)!}{(n-k)! (n-k+1)! (2k)! (n+k+2)! (n+k+3)!}$$

$$(2) C_n C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)! (2n+1)! (2k+4)!}{(n-k-1)! (n-k)! (2k+1)! (n+k+2)! (n+k+3)!}$$

Ces identités sont à rapprocher de celle-ci (cf [5]) bien connue : $C_n C_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} C_{n-k} C_k$. Mais cette dernière peut se démontrer

très facilement par le calcul en utilisant la convolution de Vandermonde alors que la démonstration par le calcul des deux premières n'est pas immédiate.

Un deuxième corollaire du théorème 1 est l'énumération des tableaux de Young standard ayant n cases et au plus k lignes pour $k=4$ et $k=5$. En effet, il existe une bijection ([13], [14]) entre les tableaux de Young standard ayant n cases et au plus 4 lignes et les chemins sous-diagonaux de longueur n dont l'extrémité terminale est sur l'axe des x .

II - Définitions

On utilisera des ensembles finis appelés alphabets dont les éléments seront appelés des lettres. Les principaux alphabets utilisés seront $Z=\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ et $A=\{a, \bar{a}\}$. Un mot est une suite finie de lettres que l'on notera $f=a_1 a_2 \dots a_n$. Le mot vide (la suite vide) sera notée ϵ . L'ensemble X^* de tous les mots sur l'alphabet X (monoïde libre engendré par X) est muni classiquement de l'opération binaire de concaténation qui met bout-à-bout 2 mots.

La longueur d'un mot, notée $|f|$, est le nombre de lettres de f . Pour une lettre x , $|f|_x$ note le nombre de lettres x contenues dans f . Un mot f' est un facteur gauche d'un mot f si il existe un mot f'' tel que $f=f'f''$.

On définit les deux morphismes δ_x et δ_y de Z^* dans \mathbb{N} par:

$$\delta_x(x)=1, \delta_x(\bar{x})=-1, \delta_x(y)=\delta_x(\bar{y})=0 \quad \text{et}$$

$$\delta_y(x)=\delta_y(\bar{x})=0, \delta_y(y)=1, \delta_y(\bar{y})=-1.$$

De même on définit le morphisme δ de A^* dans \mathbb{N} par :

$$\delta(a)=1, \delta(\bar{a})=-1.$$

On appelle langage de Dyck (parfois appelé langage restreint de Dyck) le langage suivant :

$$\{f \in A^* \mid \delta(f)=0 \text{ et } \forall f' \text{ facteur gauche de } f \text{ alors } \delta(f') \geq 0\}.$$

On le note D . Il est bien connu que $|D \cap A^{2n}| = C_n$. L'ensemble des facteurs gauches de D de longueur 1 et d'image p par δ est noté $F_{1,p}$ (1 et p sont de même parité). Le nombre

$$|F_{1,p}| = (p+1) \frac{1!}{\lfloor \frac{1-p}{2} \rfloor! \lfloor \frac{1+p}{2} \rfloor!} \quad \text{a souvent été calculé (cf Comtet [4],$$

André [1], Kreweras [16], Narayana [18], Gouyou-Beauchamps [12]).

Les mots de $F_{1,p}$ codent les chemins minimaux sous-diagonaux. Il suffit de coder les pas Est par a et les pas Nord par \bar{a} . Les chemins de

$\epsilon = \phi$

$|f|$

$|f|_x$

δ_x

δ_y

δ

D

$F_{1,p}$

Est = a

Nord = \bar{a}

Dyck paths

Dyck, cas particulier des chemins de Motzkin définis par Viennot (cf. [26] [9] et [10]), sont des chemins minimaux sous-diagonaux à qui on fait subir une rotation. Les pas Est deviennent alors des pas Nord-Est joignant un point de coordonnées (i, j) au point de coordonnées $(i+1, j+1)$ et les pas Nord des pas Sud-Est joignant (i, j) au point $(i+1, j-1)$. Le chemin au lieu de devoir rester au-dessous de la diagonale principale doit ne pas passer au-dessous de l'axe des x . La figure 1 montre le chemin minimal sous-diagonal et le chemin de Dyck correspondant codés par $aa\bar{a}aa\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}$.

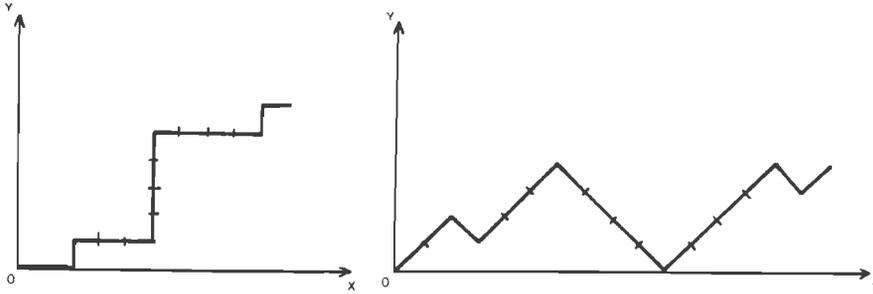


FIGURE 1

III - Chemins de Dyck ne se coupant pas.

Soit V le langage composé des mots f de Z^* vérifiant les deux propriétés suivantes :

- i) $\delta_x(f) = 0$.
- ii) $\forall f'$, facteur gauche de $f, \delta_y(f') \geq \delta_x(f') \geq 0$.

Il est facile de constater que les mots du langage V codent les chemins sous-diagonaux dont l'extrémité terminale est sur l'axe des x . Les pas Nord, Sud, Est et Ouest sont codés respectivement x, \bar{x}, y et \bar{y} . La contrainte $\delta_y(f') \geq \delta_x(f')$ force le chemin à être sous-diagonal la contrainte $\delta_x(f') \geq 0$ empêche le chemin de passer au-dessous de l'axe des x , et la contrainte $\delta_x(f) = 0$ oblige le chemin à finir sur l'axe des x .

La paire (g, h) de $F_{1,p} \times F_{1,p}$ est formée de mots qui ne se coupent pas si pour tout g' (resp. h') facteur gauche de g (resp. h) tel que $|g'| = |h'|$ on a $\delta(h') \geq \delta(g')$. On note $V_{1,p}$ l'ensemble des paires de mots de $F_{1,p} \times F_{1,p}$ qui ne se coupent pas. On peut remarquer que si (g, h) est formée de mots qui ne se coupent pas, alors $|f| = |g|$ et $\delta(f) = \delta(g)$. La figure 2 donne un exemple d'une paire de mots qui ne se coupent pas et d'une paire de mots qui se coupent.

V_{1,p}

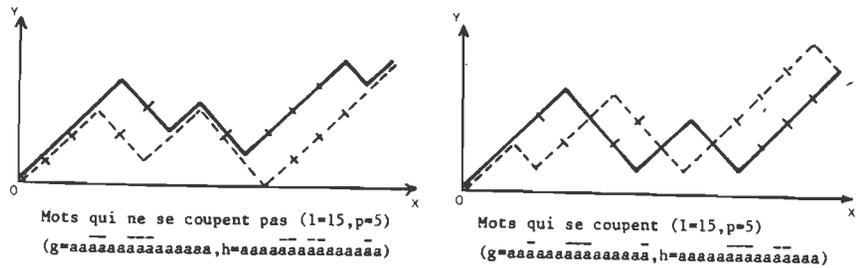


FIGURE 2

Propriété 2 - L'ensemble des mots de V de longueur l est en bijection avec l'ensemble des paires de mots (g,h) de $\bigcup_{p=0}^l V_{l,p}$ qui ne coupent pas.

Démonstration - On définit le morphisme E de Z^* dans $\bar{A}^* \times \bar{A}^*$ de la façon suivante :

$$E(y) = (a, a) ; E(\bar{y}) = (\bar{a}, \bar{a}) ; E(x) = (\bar{a}, a) ; E(\bar{x}) = (a, \bar{a}).$$

E est clairement une bijection de Z^l dans $A^l \times A^l$.

Soit f un mot de V de longueur l. Posons $E(f) = (g, h)$. Par construction $|f| = |g| = |h|$. Soient f', g' et h' les facteurs gauches de f, g et h de longueur m ($0 \leq m \leq l$). on constate facilement que $\delta(h') = \delta_x(f') + \delta_y(f')$ et que $\delta(g') = \delta_y(f') - \delta_x(f')$. La propriété ii des mots de V implique alors que $\delta(h') \geq \delta(g') \geq 0$ et la propriété i que $\delta(h) = \delta(g)$. Ainsi $E(f)$ est une paire de mots qui ne se coupent pas.

E est donc bien la bijection annoncée.

Remarque -

La paire (g,h) de $F_{l,p} \times F_{l+2,p+2}$ est formée de mots qui ne se touchent pas si, pour tout g' (resp. h') facteur gauche de g (resp. h) tel que $|g'| = |h'| - 2$ on a $\delta(h') > \delta(g')$. Notons que l et p doivent être de même parité, que les deux premières lettres de h doivent être des a et que $|h| = |g| + 2$ et $\delta(h) = \delta(g) + 2$.

La figure 3 donne un exemple d'une paire de mots qui ne se touchent pas et d'une paire de mots qui se touchent

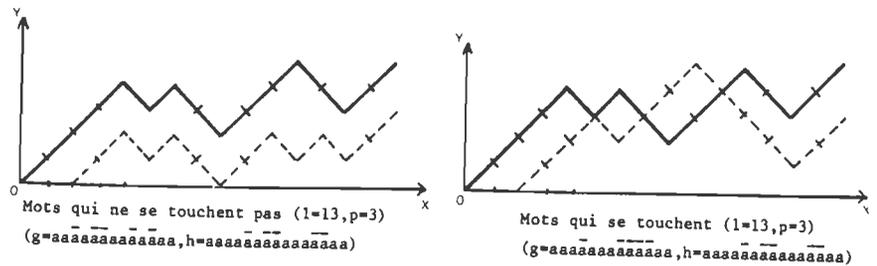


FIGURE 3

Soit $T_{1,p}$ l'ensemble des paires de mots de $F_{1,p} \times F_{1+2,p+2}$ qui ne se touchent pas. On remarque que $|T_{1,p}| = |V_{1,p}|$ puisque (g,h) appartient à $V_{1,p}$ si et seulement si (g,aah) appartient à $T_{1,p}$.

Propriété 3 - $|V_{1,p}| = |T_{1,p}| = |F_{1,p}| |F_{1+2,p+2}| - |F_{1+2,p}| |F_{1,p+2}|$.

Démonstration -

On utilise une technique désormais classique de Gessel et Viennot [11] (cf. aussi [20], [22], [27], [7] et [19] qui consiste, pour évaluer la différence du nombre d'éléments de 2 classes de n-uplets de chemins, à mettre en bijection les n-uplets de chemins qui se coupent de chacune des deux classes et ainsi à ne garder que les n-uplets de chemins qui ne se coupent pas.

Soit (g,h) un élément de $F_{1,p} \times F_{1+2,p+2}$. Notons

g_3, g_4, \dots, g_{1+2} les lettres de A composant g et h_1, h_2, \dots, h_{1+2} celles de h . Deux cas peuvent se produire :

- Soit (g,h) est une paire de mots ne se touchant pas.

- Soit (g,h) est une paire de mots qui se touchent, c'est-à-dire

qu'il existe un entier i ($3 \leq i \leq 1+2$) tel que $\delta(h_1 h_2 \dots h_i) \leq \delta(g_3 g_4 \dots g_i)$

Supposons que (g,h) soit une paire de mots qui se touchent. Soit j le

plus petit indice ($2 \leq j \leq 1+2$) tel que $\delta(h_1 h_2 \dots h_j) = \delta(g_3 g_4 \dots g_j)$. Si $j=2$

on prend $g_3 g_4 \dots g_j = \epsilon$. L'indice j existe car si deux mots se touchent

les chemins de Dyck correspondants passent au moins une fois par le

même point puisque d'une part $|\delta(h_1 h_2 \dots h_i) - \delta(g_3 g_4 \dots g_i)|$ est

toujours un nombre pair et d'autre part $|\delta(h_1 h_2 \dots h_i) - \delta(h_1 h_2 \dots h_{i-1})|$

est toujours égal à 1 (ainsi que $|\delta(g_3 g_4 \dots g_i) - \delta(g_3 g_4 \dots g_{i-1})|$).

Construisons les deux mots $g'' = h_1 h_2 \dots h_j g_{j+1} g_{j+2} \dots g_{1+2}$ et $h'' = g_3 g_4 \dots g_j h_{j+1} h_{j+2} \dots h_{1+2}$. Il est clair que (g'', h'') appartient à $F_{1+2,p} \times F_{1,p+2}$.

Par le même procédé, on peut faire correspondre à un élément (g'', h'') de $F_{1+2,p} \times F_{1,p+2}$ un élément (g, h) de l'ensemble des mots qui se touchent. En effet les chemins de Dyck correspondants à g'' et h'' se croisent et donc se touchent obligatoirement au moins une fois. Il suffit d'inverser les deux chemins à partir du premier point où ils se rencontrent. La correspondance est bijective.

Le nombre d'éléments de $T_{1,p}$ et donc de $V_{1,p}$ est bien égal à $|F_{1,p}| |F_{1+2,p+2}| - |F_{1+2,p}| |F_{1,p+2}|$.

Corollaire :

$$a) |v \cap z^{2n}| = \sum_{k=0}^n |v_{2n, 2k}| = \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! (2n+2)! (2k+3)!}{(n-k)! (n-k+1)! (2k)! (n+k+2)! (n+k+3)!}$$

$$b) |v \cap z^{2n-1}| = \sum_{k=0}^{n-1} |v_{2n-1, 2k+1}| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)! (2n+1)! (2k+4)!}{(n-k-1)! (n-k)! (2k+1)! (n+k+2)! (n+k+3)!}$$

Preuve : Comme on l'a vu dans l'introduction

$$|F_{1,p}| = (p+1) \frac{1!}{[\frac{1-p}{2}]! [\frac{1+p}{2} + 1]!} \text{ si } 1 \text{ et } p \text{ sont de m\^eme parit\^e et}$$

$$|F_{1,p}| = 0 \text{ sinon.}$$

Donc $|v_{1,p}| = \frac{1! (1+2)! (p+3)!}{[\frac{1-p}{2}]! [\frac{1-p}{2} + 1]! p! [\frac{1+p}{2} + 2]! [\frac{1+p}{2} + 3]!}$ et ainsi, en

reportant les valeurs de $|v_{1,p}|$ pour $l=2n$ et $2n-1$ on d\^emontre le corollaire. La figure 4 donne le tableau des premi\^eres valeurs de $|v_{1,p}|$

$|v_{l,p}|$

A 179898

l \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	1	0	1								
3	0	3	0	1							
4	3	0	6	0	1						
5	0	14	0	10	0	1					
6	14	0	40	0	15	0	1				
7	0	84	0	90	0	21	0	1			
8	84	0	300	0	175	0	28	0	1		
9	0	594	0	825	0	308	0	36	0	1	
10	594	0	2475	0	1925	0	504	0	45	0	1

Σ
1
1
2
4
10
25
70

FIGURE 4

new
S700

~~A 18~~

A 181571

new
S701

✓
A noz

IV- Le nombre de chemins sous-diagonaux se terminant sur l'axe des x.

On appelle M_{2l} l'ensemble des mots $f=f_1f_2\dots f_{2l}$ de $F_{2l,0}$ tels que $f_{1-l}=f_1=a$. De même on appelle D_{2l} l'ensemble des mots $f=f_1f_2\dots f_{2l}$ de $F_{2l,0}$ tels que $f_{1-l}=f_1=\bar{a}$.

On note \bar{f} l'image de $f \in A^*$ par le morphisme qui change les a en \bar{a} et les \bar{a} en a .

\tilde{f} est l'image miroir du mot \bar{f} , c'est-à-dire que si $f=f_1f_2\dots f_n$ alors $\tilde{f}=\bar{f}_n\dots\bar{f}_2\bar{f}_1$.

Propriété 4 - Le nombre de mots de V de longueur l est égal à $|M_{2l+4}| - |D_{2l+4}|$.

Démonstration : Soit (g,h) un élément de $F_{1,p} \times F_{1+2,p+2}$. Le mot $g\tilde{a}\tilde{a}\tilde{h}$ appartient à $F_{2l+4,0}$ et donc à M_{2l+4} . Inversement, pour tout mot $f=f_1f_2\dots f_{2l+4}$ de M_{2l+4} , il existe un entier p tel que $f_1f_2\dots f_l$ appartienne à $F_{1,p}$ et $f_{2l+4}\bar{f}_{2l+3}\dots\bar{f}_{1+3}$ à $F_{1+2,p+2}$. Donc

$$|M_{2l+4}| = \sum_{p=0}^l |F_{1,p}| |F_{1+2,p+2}|.$$

De même si (g,h) est un élément de $F_{1,p+2} \times F_{1+2,p}$ le mot $g\bar{a}\bar{a}\bar{h}$ appartient à $F_{2l+4,0}$ et donc à D_{2l+4} . Inversement pour tout mot f de D_{2l+4} il existe un entier p tel que $f_1f_2\dots f_l$ appartienne à

$$F_{1,p+2} \text{ et } \bar{f}_{2l+4}\bar{f}_{2l+3}\dots\bar{f}_{1+3} \text{ à } F_{1+2,p}. \text{ Ainsi } |D_{2l+4}| = \sum_{p=0}^l |F_{1,p+2}| |F_{1+2,p}|.$$

Comme $M_{2l+4} \cap D_{2l+4} = \emptyset$, on a bien l'égalité, d'après la propriété 3 :

$$|V \cap Z^l| = \sum_{p=0}^l (|F_{1,p}| |F_{1+2,p+2}| - |F_{1,p+2}| |F_{1+2,p}|) = |M_{2l+4}| - |D_{2l+4}|.$$

Propriété 5 : a) $|M_{4n+4}| - |D_{4n+4}| = C_n C_{n+1}$.

b) $|M_{4n+2}| - |D_{4n+2}| = C_n C_n$.

Démonstration :

a) $l=2n$

Soit f un élément de F_{2l+4} . Le mot f peut s'écrire $f=f_1f_2f_3$ avec $|f_1|=|f_3|=1$ et $|f_2|=4$. Soit $2p$ l'image de f_1 par δ . Si de plus f appartient à M_{2l+4} , il est dans l'une des quatre classes

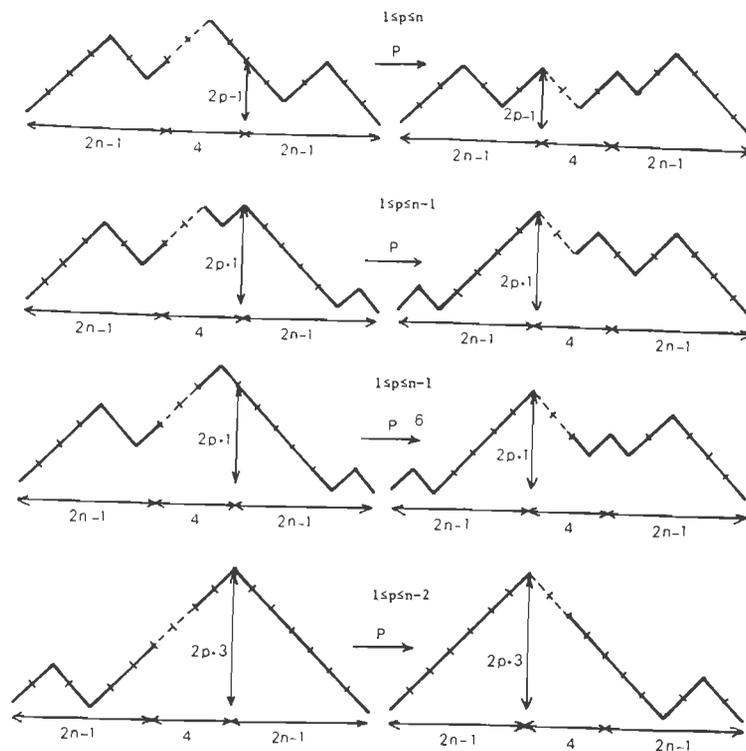


FIGURE 6

Références :

- [1] ANDRE, Solution... . C.R. Acad. Sci. Paris, 105(1887), 436-437.
- [2] BERTRAND, Solution d'un problème. C.R. Acad. Sci. Paris, 105 (1887), 369.
- [3] E. CATALAN, Notes sur une équation aux différences finies. J. Math. Pures Appl., 3(1838), 508-516.
- [4] L. COMTER, Analyse combinatoire, P.U.F., Paris, 1970.
- [5] R. CORI, S. DULUCQ, G. VIENNOT, Shuffle of parenthesis systems and Baxter permutations. Rapport CNRS LA 226, Bordeaux (1984), à paraître dans J.C.T. (A).
- [6] S. DULUCQ, Equations avec opérateurs : un outil combinatoire. Thèse 3ème cycle, Univ. Bordeaux I (1981).
- [7] S. DULUCQ, G. VIENNOT, Un théorème généralisant l'inversion des matrices et le "théorème Maître" de Mac-Mahon. Manuscrit (1982).
- [8] L. EULER, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 7(1758-1759), 13-14.
- [9] P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions. Discrete math., 32 (1980), 125-161.

- [10] J. FRANCON, G. VIENNOT, Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi. *Discrete Math.*, 28 (1979), 21-35.
- [11] I.M. GESSEL, G. VIENNOT, Binomial determinants, Paths and Hook lengths formulae, Rapport Bordeaux I n°8502, à paraître dans *Adv. in Maths.*
- [12] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, Deux propriétés combinatoires du langage de Lukasiewicz, *R.A.I.R.O.*, 3 (1975), 13-24.
- [13] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, Codages par des mots et des chemins : problème combinatoires et algorithmiques, Thèse d'état Université de Bordeaux I, 1985.
- [14] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, Standard Young tableaux of height 4 and 5, soumis à *Europ. J. Combinatorics*.
- [15] F. HARARY, G. PRINS, W.T. TUTTE, The number of plane trees. *Indag. Math.*, 26 (1964), 319-329.
- [16] KREWERAS, Dénombrement des chemins minimaux à sauts imposés. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 263 (1966), 1-3.
- [17] R.C. MULLIN, The enumeration of hamiltonian polygons in triangular maps. *Pacific J. Math.*, 16(1966), 139-145.
- [18] T.V. NARAYANA, A partial order and its applications to probability theory. *Shankhya*, 21 (1959) 91-98.
- [19] J.B. REMMEL, Bijective proofs of formulae for the number of standard Young tableaux. *Linear and Multilinear Algebra* 11 (1982), 45-100.
- [20] J.B. REMMEL, R. WHITNEY, A bijective proof of the hook formula for the number of column strict tableaux with bounded entries. *Europ. J. Combinatorics*, 4 (1983), 45-63.
- [21] O. RODRIGUES, Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs. *J. Math. Pures et Appl.*, 3(1838), 549.
- [22] M. de SAINTE-CATHERINE, Couplage et Pfaffien en combinatoire et physique. Thèse 3ème cycle, Université de Bordeaux I 1983.
- [23] J.A. SEGNER, Enumeralis modorum quibus figurae planae rectilinae per diagonales dividantur in triangula. *Novi Comentarum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 7 (1758-1759), 203-209.
- [24] R.P. STANLEY, Differentiably finite power series. *Europ. J. Comb.*, 1 (1980), 175-188.
- [25] W.T. TUTTE, A census of hamiltonian polygons. *Canad. J. Maths.* 14 (1962), 402-417.
- [26] G. VIENNOT, Interpretations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi. Séminaire de théorie des nombres de l'Université de Bordeaux I, exposé 11 (1981-1982).
- [27] G. VIENNOT, Théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux. Notes de séminaires de l'université du Québec à Montréal, (1983).

~~Work~~

$$|F_{l,p}| = \frac{l! (p+1)}{\left(\frac{l-p}{2}\right)! \left(\frac{l+p}{2} + 1\right)!}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A53121}}$$

$$= \binom{l}{\frac{l-p}{2}} \frac{p+1}{(l+p+2)}$$

Same as A8313
A8315