1. concours général 1991 - exercice 4

énoncé

Soit p un nombre entier naturel et $n = 2^p$.

On considère les parties A de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ possédant la propriété suivante :

si x appartient à A, alors $2x$ n'appartient pas à A.

Déterminer le nombre maximal d'éléments d'un telle partie A.

2. concours général 1991 - exercice 4

Solution 1

$$\begin{cases} \quad p \in N, n = 2^p \qquad E = \{1, 2, ..., n\} \\ \text{et } A \in P(E) \text{ telle que } \forall x \in A, \quad 2x \notin A \end{cases}$$

pour $i \in \{0, ..., p-2\}$ on note B_i l'ensemble des couples $\left(2^i+1; 2^{i+1}+2\right) \left(2^i+2; 2^{i+1}+4\right) ... \left(2^i+k; 2^{i+1}+2k\right) \left(2^{i+1}; 2^{i+2}\right)$. On a $B_i \subset E$
Pour chaque couple (a, b) de B_i on a $b = 2a$.
Par conséquent, au moins un élément de $\{a; b\}$ n'appartient pas à A.
On note $\begin{cases} B = \{(1,2) \cup B_1 \cup B_3 \cup ... \cup B_{p-2}\} \text{ si } p \text{ est impair} \\ \text{et } B = \{(1,2) \cup B_2 \cup B_4 \cup ... \cup B_{p-2}\} \text{ si } p \text{ est pair} \end{cases}$

Pour tout $i \in \{0, ..., p-2\}$ on note $\begin{cases} \quad a_{i_k} = 2^i + k \\ \text{et } b_{i_k} = 2^{i+1} + 2k \end{cases} \qquad k \in \left\{1; ...; 2^i\right\}$ Notons que tous les nombres a_{i_k} et b_{i_k} appartenant à B sont différents car $a_{i_{2^i}} < b_{i_{2^i}}$. D'autre part on a toujours $b_{i_k} = 2a_{i_k}$ donc parmi tous les nombres des couples appartenant à B la moitié au moins n'appartient pas à A. Il suffit donc de dénombrer les couples de B :
On a $cardB_i = 2^i$ d'après la définition de B_i.
donc $\begin{cases} cardB = 1 + 2^1 + 2^3 + ... + 2^{p-2} & \text{si } p \text{ impair} \\ \quad cardB = 1 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{p-2} & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2^2 + 2^4 + ... + 2^{p-2} &= 4^1 + 4^2 + ... + 4^{\frac{p-2}{2}} \\ &= \frac{4}{3}\left(4^{\frac{p-2}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^p - 4\right) \end{aligned}$$

d'où si p pair $cardB = 1 + \frac{1}{3}\left(2^p - 4\right) = \frac{1}{3}\left(2^p - 1\right)$

si p impair

$$
\begin{aligned}
cardB = 1 + 2\left(2^0 + 2^3 + ... + 2^{p-3}\right) &= 1 + 2\left(\frac{1}{3}\left(2^{p-1} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^p + 1\right)
\end{aligned}
$$

Or $cardE = 2^p$
donc $cardA \leq cardE - cardB$
d'où si p pair $cardA \leq \frac{1}{3}\left(2^{p+1} + 1\right)$
si p impair $cardA \leq \frac{1}{3}\left(2^{p+1} - 1\right)$
On va vérifier que ce maximum est atteint :
Soit $A = \left\{2^p; 2^p - 1; ...; 2^{p-1} + 1\right\} \cup \left\{2^{p-2}; ...; 2^{p-3} + 1\right\} \cup ... \cup \{2\}$ si p est impair
$A = \left\{2^p; 2^p - 1; ...; 2^{p-1} + 1\right\} \cup \left\{2^{p-2}; ...; 2^{p-3} + 1\right\} \cup ... \cup \left\{2^2; 2^1 + 1\right\} \cup \{1\}$ si p est pair
On vérifie aisément que A possède bien la propriété $x \in A{:}2x \notin A$.
D'autre part on calcule $cardA = \left(2^p - 2^{p-1}\right) + \left(2^{p-2} - 2^{p-3}\right) + ... + \left(2^2 - 2^1\right) + 1$ si p est pair
et si p est impair $cardA = \left(2^p - 2^{p-1}\right) + \left(2^{p-2} - 2^{p-3}\right) + ... + \left(2^3 - 2^2\right) + 1$
d'où si p est pair

$$
\begin{aligned}
cardA &= \left(2^{p-1} + 2^{p-3} + ... + 2^1 + 1\right) \\
&= 1 + 2\left(1 + 2^3 + ... + 2^{p-2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^{p+1} + 1\right)
\end{aligned}
$$

Si p est impair

$$\begin{aligned} cardA &= \left(2^{p-1}+2^{p-3}+...+2^1+1\right) \\ &= 1+2\left(2^1+2^3+...+2^{p-2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^{p+1}-1\right) \end{aligned}$$

Donc le maxiumum est atteint.