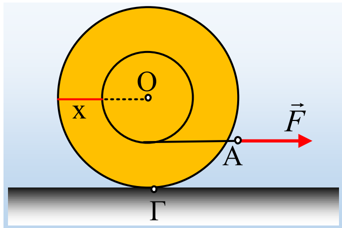
Ποια η κίνηση του κυλίνδρου;



Δίνεται ένας κύλινδρος μάζας m=4kg και ακτίνας R, ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0{,}5$. Το κεντρικό τμήμα του κυλίνδρου φέρει εγκοπή βάθους x= ½ R, στην οποία έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα, στο άκρο Α του οποίου, κάποια στιγμή, ασκούμε οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα.

i) Ποια είναι η μέγιστη δύναμη F που μπορούμε να ασκήσουμε μέσω του νήματος στον κύλινδρο, ώστε αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

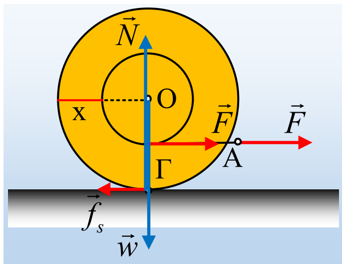
ii) Αν ασκήσουμε δύναμη μέτρου F_1=36N, να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου Ο του κυλίνδρου καθώς και η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου επαφής με το έδαφος, σημείου Γ.

iii) Ποιο το μέτρο της δύναμης F_2 ώστε τα σημεία Ο και Γ να έχουν ίσες επιταχύνσεις; Τι κίνηση κάνει τότε ο κύλινδρος;

iv) Να περιγράψετε την κίνηση του κυλίνδρου αν το μέτρο της ασκούμενης δύναμης γίνει F_3=48N.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου I_{cm}= ½ mR^2.

Απάντηση:



i) Για να κυλίεται ο κύλινδρος (χωρίς να ολισθαίνει), θα πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική. Αλλά τότε, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική με επιτάχυνση α_{cm} και μια στροφική γύρω από τον οριζόντιο άξονά του που διέρχεται από το κέντρο μάζας Ο, παίρνουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα (θεωρούμε θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση για την μεταφορική κίνηση και θετική την φορά περιστροφής, την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = ma_{cm} \rightarrow F - f_s = ma_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow f_s R - F\left(R-x\right) = \frac{1}{2}mR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$f_s - \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}m\left(R\cdot a_{\gamma\omega\nu}\right) \quad (2)$$

Αλλά αφού ο κύλινδρος κυλίεται $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

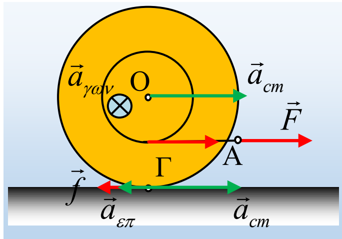
$$\frac{1}{2}F = \frac{3}{2}m\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = \frac{F}{3m} \xrightarrow{(1)}$$

$$f_s = F - ma_{cm} = F - m\frac{F}{3m} = \frac{2}{3}F \quad (3)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δείχνει ότι μεγαλώνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, αυξάνεται και το μέτρο της στατικής τριβής. Αλλά τότε η μέγιστη δύναμη που μπορούμε να ασκήσουμε, χωρίς να καταστραφεί η κύλιση, είναι αυτή που θα προκαλέσει την εμφάνιση της μέγιστης στατικής τριβής, της οριακής. Έτσι η (3) γίνεται:

$$F_{max} = \frac{3}{2} f_{s,max} = \frac{3}{2}\mu_s N = \frac{3}{2}\mu_s mg = \frac{3}{2} 0,5 \cdot 4 \cdot 10N = 30N$$

ii) Με βάση τα παραπάνω, αν η δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο είναι μικρότερη ή ίση των 30N ο κύλινδρος κυλίεται. Αλλά τότε όταν F=36N, προφανώς ο κύλινδρος θα περιστρέφεται αλλά ταυτόχρονα θα ολισθαίνει, οπότε πάνω του θα ασκηθεί δύναμη τριβής ολίσθησης μέτρου:



$$f = \mu N = \mu mg = 0,5 \cdot 4 \cdot 10N = 20N$$

Έτσι επιστρέφοντας στις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \rightarrow F_1 - f = ma_{cm1} \rightarrow$$
$$a_{cm1} = \frac{F_1 - f}{m} = \frac{36N - 20N}{4kg} = 4m/s^2$$

Και από την (2) παίρνουμε:

$$f - \frac{1}{2}F_1 = \frac{1}{2}m\left(R \cdot a_{\gamma\omega\nu}\right) \rightarrow$$
$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \left(R \cdot a_{\gamma\omega\nu}\right) = \frac{2f - F_1}{m} = \frac{2 \cdot 20 - 36}{4} m/s^2 = 1m/s^2.$$

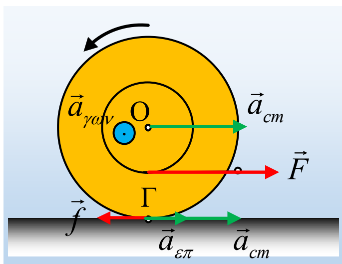
Με βάση τις παραπάνω τιμές, το κέντρο μάζας Ο έχει επιτάχυνση προς τα δεξιά μέτρου α_{cm}=4m/s^2, ενώ το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο, έχει οριζόντια επιτάχυνση (καθώς θα εκτελεί και κυκλική κίνηση θα έχει και συνιστώσα επιτάχυνσης στην διεύθυνση της ακτίνας…) με κατεύθυνση προς τα δεξιά, μέτρου:

$$\alpha_\Gamma = \alpha_{cm} - \alpha_{\varepsilon\pi} = 4m/s^2 - 1\ m/s^2 = 3\ m/s^2.$$

iii) Για να έχουν ίσες επιταχύνσεις τα σημεία Ο και Γ, θα πρέπει να μηδενιστεί η γωνιακή επιτάχυνση, οπότε θα μηδενιστεί και η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Γ, η οποία οφείλεται στην περιστροφική κίνηση. Αλλά τότε η κίνηση του κυλίνδρου θα είναι «καθαρά» μεταφορική και η εξίσωση (2) μας δίνει:

$$f - \frac{1}{2}F_2 = \frac{1}{2}m\left(R \cdot a_{\gamma\omega\nu}\right) = 0 \rightarrow$$
$$F_2 = 2f = 40N$$

iv) Αν αυξήσουμε περαιτέρω το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή F_3=48N, τότε ουσιαστικά αυξάνουμε και την ροπή της δύναμης, ως προς το Ο, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει να περιστρέφεται αριστερόστροφα, ενώ συνεχίζει να επιταχύνεται μεταφορικά προς τα δεξιά. Πράγματι και πάλι από τις εξισώσεις (1) και (2), χρησιμοποιώντας μέτρα, θα έχουμε:



$$\Sigma F_x = ma_{cm} \to F_3 - f = ma_{cm3} \to$$

$$a_{cm3} = \frac{F_3 - f}{m} = \frac{48N - 20N}{4kg} = 7m/s^2.$$

Με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Ενώ από την (2) θα πάρουμε:

$$\frac{1}{2}F_3 - f = \frac{1}{2}m\left(R \cdot a_{\gamma\omega\nu}\right) \to$$

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \left(R \cdot a_{\gamma\omega\nu}\right) = \frac{F_3 - 2f}{m} = \frac{48 - 2\cdot 20}{4}m/s^2 = 2m/s^2.$$

Με κατεύθυνση για το σημείο Γ, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com