THÉORIE DES NOMBRES. — Sur le Théorème des Nombres Premiers. Note de **Hédi Daboussi,** présentée par Jean-Pierre Kahane.

Remise le 19 décembre 1983.

Nous donnons une nouvelle démonstration du théorème des nombres premiers n'utilisant pas l'inégalité de Selberg.

*NUMBER THEORY.* — On the Prime Number Theorem.

*We give a new elementary proof of the prime number theorem which does not use Selberg's inequality.*

*A H. Delange et P. Erdős à l'occasion de leur 70^e anniversaire.*

I. 1. Soit $y \geqq 2$ et $v_y$, $u_y$ deux fonctions complètement multiplicatives définies par :

$$v_y(p)=\begin{cases}1 & \text{si } p\leqq y\\ 0 & \text{si } p>y\end{cases},\qquad u_y(p)=\begin{cases}1 & \text{si } p>y\\ 0 & \text{si } p\leqq y\end{cases}$$

la lettre $p$ désignant des nombres premiers.

$\Lambda$ désigne la fonction de Von Mangoldt, $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1, $\mu$ la fonction de Möbius; ainsi, par exemple $\log n=(\Lambda * \mathbf{1})(n)$, où le signe $*$ désigne la convolution de Dirichlet. On notera $V_y(t)=\sum_{n\leqq t} v_y(n)\mu(n)$, $V_y^*(t)=\sum_{n\leqq t} v_y(n)$ et $M(t)=\sum_{n\leqq t}\mu(n)$. Nous montrerons que $\lim_{x\to\infty} |M(x)/x|=0$.

I. 2. *Aperçu de la méthode.* — Nous démontrerons que pour tout $y\geqq 2$ :

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, |M(x)/x| \leqq \Big\{\prod_{p\leqq y}(1-(1/p))\Big\}\int_1^{\infty}(|V_y(t)|/t^2)\,dt. \tag{1}$$

Soit $\alpha=\overline{\lim}\,|M(x)|/x$; évidemment $\alpha\leqq 1$.

Nous établirons qu'il existe $\delta>1$ tel que pour tout $\beta$, $\alpha<\beta<2$, on a :

$$\int_1^{y}(|V_y(t)|/t^2)\,dt\leqq \beta/\delta\,\log y+O(1), \tag{2}$$

et que l'on a :

$$\int_y^{\infty}(|V_y(t)|/t^2)\,dt\leqq \beta(C-1)\log y+o(\log y), \tag{3}$$

où $C=\lim_{y\to\infty}(\log y)^{-1}\prod_{p\leqq y}(1-(1/p))^{-1}$ (Il est connu que $C=e^{\gamma}$, où $\gamma$ est la constante d'Euler, nous n'en ferons pas usage).

(3) entraînera que $\alpha\leqq\beta(1-C^{-1}(1-(1/\delta))$, le facteur de $\beta$ étant $<1$, il en résulte, en faisant tendre $\beta$ vers $\alpha$, que $\alpha=0$).

II. 1. Les séries $\Sigma\, v_y(n)/n$ et $\Sigma\,(v_y(n)/n)\,\mu(n)$ sont absolument convergentes avec pour sommes $\prod_{p\leqq y}(1-(1/p))^{-1}$ et $\prod_{p\leqq y}(1-(1/p))$.

On en déduit (en partant de $u_y=v_y\,\mu*\mathbf{1}$) que :

$$\lim_{x\to\infty}(1/x)\sum_{n\leqq x}u_y(n)\quad\text{existe et est égale à}\quad\prod_{p\leqq y}(1-(1/p)).$$

D'après les définitions de $v_y$ et $u_y$, il est clair que $\mu(n)=(\mu\, u_y * \mu\, v_y)(n)$ pour tout entier

$n$. Ainsi :

$$M(x)=\sum_{n\leqq x}\mu(n)\,u_y(n)\,V_y(x/n).$$

Notons $d_1=1<d_2\ldots<d_q$ la suite finie des entiers sans facteur carré ayant tous leurs diviseurs premiers $\leqq y$, et remarquons que, si $n$ vérifie $x/d_{j+1}<n\leqq x/d_j$, alors $V_y(x/n)=V_y(d_j)$. On obtient ainsi :

$$M(x)=\sum_{j=1}^{q-1}V_y(d_j)\sum_{x/d_{j+1}<n\leqq x/d_j}u_y(n)\,\mu(n)+V_y(d_q)\sum_{n\leqq x/d_q}u_y(n)\,\mu(n),$$

$$\varlimsup_{x\to\infty}|M(x)/x|\leqq\sum_{j=1}^{q-1}|V_y(d_j)|\lim_{x\to\infty}(1/x)\sum_{x/d_{j+1}<n\leqq x/d_j}u_y(n)+|V_y(d_q)|\lim_{x\to\infty}(1/x)\sum_{n\leqq x/d_q}u_y(n).$$

Ce qui fournit (1).

II.2. On sait qu'il existe $M>0$ tel que, pour tous nombres $a$ et $b$ positifs :

$$\left|\int_a^b(M(t)/t^2)\,dt\right|\leqq M.$$

Prenons $\alpha<\beta<2$ et $x_\beta$ tel que pour $x\geqq x_\beta$, $|M(x)|\leqq\beta x$.

Soit $\delta=\min(2,\ 1+(\alpha^2/4M))$.

Puisque $v_y(n)=1$ si $n\leqq y$ et donc $V_y(t)=M(t)$ si $t\leqq y$, l'inégalité (2) s'écrit :

$$\int_1^y(|M(t)|/t^2)\,dt\leqq\beta/\delta\,\log y+O(1). \tag{2)'$$

Une telle inégalité intervient dans la méthode de Selberg ([1], [3]). L'inégalité (2)' s'établit par la méthode utilisée en [2] pour prouver le lemme 5.8.

III. Quelques lemmes.

III.1. Lemme 1. — *Soit $h$ une fonction définie sur $[y,+\infty[$, positive, décroissante et possédant une dérivée continue. On a :*

*Pour tout $t\geqq y$ :* $$\sum_{p\leqq y}(\log p/p)\,h(pt)=\int_t^{yt}(h(v)/v)\,dv+O(h(y)).$$

*Pour tout $t\geqq 1$ :* $$\sum_{y/t<p\leqq y}(\log p/p)\,h(pt)=\int_y^{yt}(h(v)/v)\,dv+O(h(y)).$$

Ce lemme s'obtient par intégration par parties grâce à la relation :

$$\sum_{p\leqq t}\log p/p=\log t+O(1).$$

III.2. Lemme 2. — *Posons, pour $s>0$ :*

$$k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}e^{f(x)}\,dx,\qquad \text{où}\quad f(x)=\int_0^x((1-e^{-u})/u)\,du.$$

*Alors la fonction $k$ est positive, décroissante et indéfiniment dérivable. De plus :*

$$sk(s)-\int_s^{s+1}k(u)\,du=1\quad \text{pour tout}\ s>0. \tag{4}$$

[Il est immédiat que $\int_s^{s+1}k(u)\,du=\int_0^\infty e^{f(x)}e^{-sx}f'(x)\,dx$. En intégrant par parties on obtient (4)].

III. 3. LEMME 3. — *Soit k la fonction définie au lemme 2, on a :*

$$\int_1^2 k(u)(2-u)\,du = \mathrm{C}-1. \tag{5}$$

Nous établirons ce lemme par une méthode purement arithmétique, une méthode analogue nous fournira (3). De la relation $\log = \Lambda * \mathbf{1}$, nous déduisons $v_y \log = v_y \Lambda * v_y$, et donc :

$$\sum_{n \leqq t} v_y(n) \log n = \sum_{n \leqq t} v_y(n) \Lambda(n) \mathrm{V}_y^*(t/n);$$

ou encore, $\mathrm{V}_y^*(t) \log t = \sum_{n \leqq t} v_y(n) \Lambda(n) \mathrm{V}_y^*(t/n) + \sum_{n \leqq t} v_y(n) \log(t/n)$.

Par définition de $\Lambda$ et $v_y$, on a :

$$\mathrm{V}_y^*(t) \log t = \sum_{\substack{p \leqq t \\ p \leqq y}} \log p\, \mathrm{V}_y^*(t/p) + \sum_{\substack{p \leqq y \\ p^r \leqq t,\, r \geqq 2}} \log p\, \mathrm{V}_y^*(t/p^r) + \sum_{n \leqq t} v_y(n) \log(t/n).$$

Posons pour $t > y$ : $h(t) = (1/\log y)\, k(\log t/\log y)$. Alors :

$$\int_y^\infty (\mathrm{V}_y^*(t)/t^2) \log t \,.\, h(t)\,dt = \int_y^\infty \sum_{\substack{p \leqq t \\ p \leqq y}} \log p\, \mathrm{V}_y^*(t/p)\,(h(t)/t^2)\,dt + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2, \tag{6}$$

où

$$\mathrm{E}_1 = \int_y^\infty \sum_{\substack{p \leqq y \\ p^r \leqq t,\, r \geqq 2}} \log p\, \mathrm{V}_y^*(t/p^r)\,(h(t)/t^2)\,dt, \qquad \mathrm{E}_2 = \int_y^\infty \sum_{n \leqq t} v_y(n) \log(t/n)\,(h(t)/t^2)\,dt.$$

La décroissance de $h$ entraîne que :

$$\mathrm{E}_1 \leqq h(y) \,.\, \Big(\sum_{\substack{r \geqq 2 \\ p}} \log p/p^r\Big) \,.\, \int_1^\infty (\mathrm{V}_y^*(u)/u^2)\,du, \qquad \mathrm{E}_2 \leqq h(y) \,.\, \Big(\sum_n v_y(n)/n\Big) \,.\, \int_1^\infty (\log t/t^2)\,dt.$$

Par ailleurs $\sum v_y(n)/n = \int_1^\infty (\mathrm{V}_y^*(u)/u^2)\,du = O(\log y)$, ce qui implique que $\mathrm{E}_1 = O(1)$ et $\mathrm{E}_2 = O(1)$. L'intégrale à droite de (6) s'écrit :

$$\int_y^\infty \sum_{\substack{p \leqq t \\ p \leqq y}} \log p\, \mathrm{V}_y^*(t/p)\,(h(t)/t^2)\,dt = \sum_{p \leqq y} \log p/p \int_{y/p}^{y} (\mathrm{V}_y^*(t)/t^2)\, h(pt)\,dt$$

$$+ \sum_{p \leqq y} \log p/p \int_y^\infty (\mathrm{V}_y^*(t)/t^2)\, h(pt)\,dt$$

$$= \int_1^y \mathrm{V}_y^*(t)/t^2 \sum_{y/t < p \leqq y} (\log p/p)\, h(pt)\,dt + \int_y^\infty \mathrm{V}_y^*(t)/t^2 \sum_{p \leqq y} (\log p/p)\, h(pt)\,dt,$$

ce qui, grâce au lemme 1, donne :

$$\int_y^\infty \mathrm{V}_y^*(t)/t^2 \left\{ \log t \,.\, h(t) - \int_t^{yt} (h(v)/v)\,dv \right\} dt = \int_1^y \mathrm{V}_y^*(t)/t^2 \left( \int_y^{yt} (h(v)/v)\,dv \right) dt + O(1).$$

Il découle du lemme 2 et de la définition de $h$ que :

$$\log t \,.\, h(t) - \int_t^{yt} (h(v)/v)\,dv = 1 \quad \text{pour tout } t \geqq 1.$$

En utilisant également le fait que $\mathrm{V}_y^*(t) = [t] = t + O(1)$ pour tout $t \leqq y$, on obtient par un calcul simple que :

$$\int_y^{\infty} (\mathrm{V}_y^*(t)/t^2)\, dt = \left(\int_1^2 k(u)\,(2-u)\,du\right) \log y + O(1).$$

Par ailleurs :

$$\int_y^{\infty} (\mathrm{V}_y^*(t)/t^2)\, dt = \sum_n v_y(n)/n - \sum_{n \leqq y} v_y(n)/n = (\mathrm{C} + o(1)) \log y - \log y + O(1).$$

Ces deux formes de l'intégrale fournissent l'égalité (5).

IV. Preuve de l'inégalité (3). — De la relation : $-\mu \log = \mu * \Lambda$, nous déduisons que $-v_y \mu \log = v_y \mu * v_y \Lambda$.

En raisonnant comme au paragraphe précédent, nous avons successivement :

$$|\mathrm{V}_y(t)| \log t \leqq \sum_{n \leqq t} v_y(n) \Lambda(n) |\mathrm{V}_y(t/n)| + \sum_{n \leqq t} v_y(n) \log(t/n),$$

et, avec la fonction $h$ définie plus haut,

$$\int_y^{\infty} |\mathrm{V}_y(t)|/t^2 \left\{ \log t \,.\, h(t) - \int_t^{yt} (h(v)/v)\, dv \right\} dt$$

$$\leqq \int_1^y |\mathrm{V}_y(t)|/t^2 \left( \int_y^{yt} (h(v)/v)\, dv \right) dt + O(1),$$

et finalement :

$$\int_y^{\infty} (|\mathrm{V}_y(t)|/t^2)\, dt \leqq \int_1^y |\mathrm{M}(t)|/t^2 \left( \int_y^{yt} (h(v)/v)\, dv \right) dt + O(1).$$

En majorant $|\mathrm{M}(t)|$ par $\beta t$ pour $t \geqq x_\beta$ et en effectuant l'intégration à droite, on a :

$$\int_y^{\infty} (|\mathrm{V}_y(t)|/t^2)\, dt \leqq \beta \left( \int_1^2 k(u)\,(2-u)\,du \right) \log y + O(1),$$

et donc l'inégalité (3) grâce au lemme 3.

Références bibliographiques

[1] P. Erdős, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime Number Theorem, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, 35, 1949, p. 374-384.

[2] N. Levinson, A motivated account of an elementary proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly*, 76, 1969, p. 225-245.

[3] A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem, *Ann. of Math.*, (2), 50, 1949, p. 305-313.

H. D. : *Université Paris-Sud, Département de Mathématiques*, bât. 425, 91405 *Orsay*.