Montagnards et polygones

Lycée Sainte Marie d'Antony
En jumelage avec le
lycée Blaise Pascal d'Orsay

juin 2004

Doctorantes

Sophie DONNET
Marie SAUVÉ

Professeurs

Frère Guillaume GERVET
Marie-Dominique MOUTON

Élèves (de première S)

Michaël BENILUZ
Thibault BOURGERON
Yves DESCLERCS
Alice MAGNAUDET

Table des matières

1 Montagnards

1.1 Énoncé

Un montagnard va marcher 40 heures. Il part du niveau de la mer, et doit y revenir, *in fine*. Chaque heure est, soit une heure de montée, soit une heure de descente. Combien de telles randonnées peut-il imaginer ?

Autrement dit, l'énoncé du sujet précise que le montagnard :

1. part du niveau de la mer ;
2. monte pendant une heure ou descend pendant une heure ;
3. ne peut pas aller sous le niveau de la mer (condition implicite) ;
4. doit revenir au niveau de la mer à la fin de sa randonnée.

1.2 Représentation graphique

1.2.1 Représentation

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal. Dans toute la suite de ce compte-rendu, nous appellerons, abusivement, *point* (x, y), le point de coordonnées (x, y).

Dans le but de représenter une randonnée du montagnard, on construit une suite de points dans le plan de la façon suivante :

1. le premier point est l'origine O du repère ;
2. si un point (x, y) appartient à la suite de points, alors, le point lui succédant est, au choix, le point $(x+1, y+1)$ ou le point $(x+1, y-1)$;
3. un point de la suite ne peut avoir une ordonnée strictement négative ;
4. le dernier point de la suite doit être de la forme $(2n, 0)$[1].

Pour obtenir un graphique plus lisible, on relit deux points de la suite par une segment si et seulement si ils se succèdent.

On appelle *chemin* la représentation d'une suite de points respectant la condition 2.. Un chemin est dit *envisageable* si et seulement si il respecte les quatre conditions énoncées.
La *longueur* d'un chemin est la valeur absolue de la différence des abscisses des points extrêmes (d'un chemin).

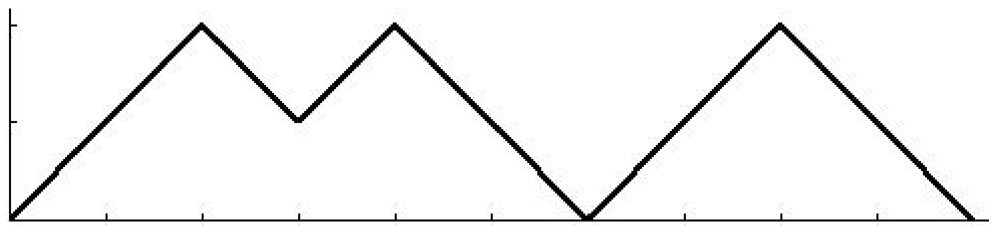

Fig. 1 – Un chemin envisageable

Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. On note u_n (et pas u_{2n}) le nombre de chemins envisageables de longueur $2n$.[2]

1.2.2 Formule de récurrence

Si le montagnard passe par le point $(2k, 0)$, sans être passé par l'axe des abscisses, il a pu le faire de u_{k-1} façons. En effet cela revient à dénombrer les chemins passant par les points $(1, 1)$ et $(2k-1, 1)$, sans passer sous la droite d'équation $y = 1$, qui sont en bijection avec tous les chemins envisageables de longueur $2k-2$. Il y a u_{n-k} façons d'aller du point $(2k, 0)$ au point $(2n, 0)$ (on dénombre tous les chemins de longueur $2n - 2k$).

k peut varier de 2 à $(n-1)$ (en $k = 1$ et $k = n$ il faut savoir calculer u_0).

- **Pour** $k = 1$, on dénombre tous les chemins envisageables passant par $(2, 0)$ et $(2n, 0)$: il y en a u_{n-1}.
- **Pour** $k = n$, on dénombre tous les chemins envisageables passant par $(1, 1)$ et $(2n-1, 1)$ sans passer sous la droite d'équation $y = 1$: il y en a u_{n-1}.

[1] $2n$ est la « durée » de la randonnée ($2n$ heures)

[2] Le nombre d'heures de randonnée est toujours pair car pour revenir à un point de l'axe des abscisses, le montagnard doit monter autant de fois qu'il descend.

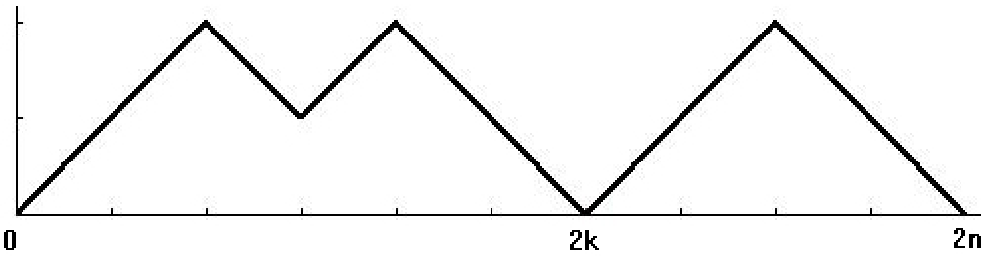

FIG. 2 – Formule de récurrence (chemins)

Donc :

$$\boxed{u_n = \sum_{k=2}^{n-1} u_{k-1}u_{n-k} + 2u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}u_{n-k}}, \tag{1}$$

en posant $u_0 = 1$ (dans toute la suite on pose $u_0 = 1$).

1.3 Représentation binaire

1.3.1 Nombres binaires et chemins

On associe à tout chemin un nombre binaire de la façon suivante. Au fur et à mesure que le montagnard effectue sa randonnée, on note :
- $\nvdash$ si le montagnard passe du point (x, y) au point $(x + 1, y - 1)$ (descente) ;
- $\nVdash$ si le montagnard passe du point (x, y) au point $(x + 1, y + 1)$ (montée).

Par exemple au chemin passant successivement par les points $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$ est associé le nombre 10. On appelle ce nombre *représentation binaire* du chemin.

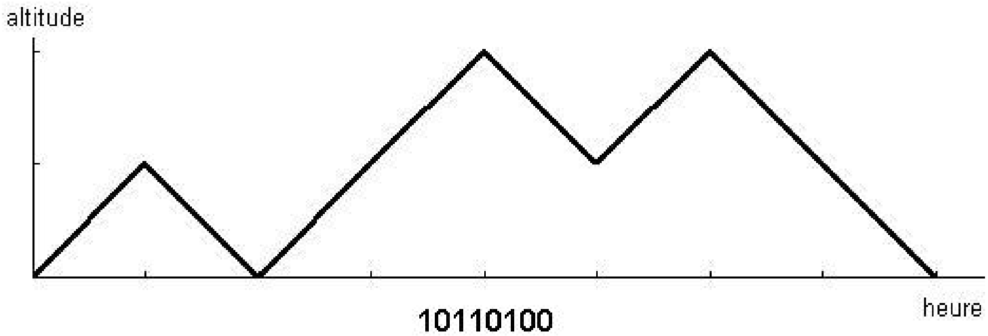

FIG. 3 – Représentation binaire

1.3.2 Majorant de (u_n)

La représentation binaire d'un chemin envisageable contient autant de 1 et de 0, comme cela a déjà été remarqué.

Ainsi, un majorant simple de u_n est donné par

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

la combinaison de n objets pris parmi $2n$.

1.3.3 Programme

Chercher la valeur de u_n pour n donné revient à dénombrer les nombres binaires (conditions nécessaires et suffisantes) ayant le même nombre de 1 et de 0 et ayant, en tout « rang », plus ou autant de 1 que 0. On veut dire que le nombre 11000110 ne convient pas car au rang 5 (en lisant le nombre de gauche à droite) il y a trois 0 et seulement deux 1 : le montagnard serait strictement sous le niveau de la mer ! Le nombre 11001010 convient. Ces conditions impliquent que la représentation binaire d'un chemin envisageable doit commencer par 1 et finir par 0 (si ce n'était pas le cas cela signifirait, que le montagnard était strictement en-dessous du niveau de la mer l'heure avant d'achever sa randonnée).

On peut donc imaginer un programme qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, écrit, de deux en deux, tous les nombres compris entre 2^{2n-1} et $2^{2n}-2$; ces nombres, une fois convertis en base 2, sont tous les nombres ayant $2n$ chiffres, commençant par un 1 et finissant par 0. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'en tout rang le nombre de 1 est supérieur (ou égal) au nombre de 0 et qu'il y a, dans tout le nombre, autant de 1 et de 0.

Le programme donne les valeurs suivantes.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	2	5	14	42	132	429	1 430	4 862	16 796
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$	2	$2,5$	$2,8$	3	$3,143$	$3,25$	$3,333$	$3,4$	$3,455$	$3,5$

11	12	13	14	15
58 786	208 012	742 900	2 674 440	9 694 845
$3,538$	$3,571$	$3,6$	$3,625$	

On peut constater que le rapport de deux termes consécutifs semble tendre vers 4.

1.3.4 Conjecture

Récapitulons les premières valeurs prises par le majorant $\left(\binom{2n}{n}\right)_n$ et par $(u_n)_n$.

n	v_n	u_n	$\frac{v_n}{u_n}$
1	2	1	2
2	6	2	3
3	20	5	4
4	70	14	5
5	252	42	6

En plus d'être entier (ce qui n'a rien d'évident *a priori*), le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ semble être égal à $(n+1)$.
Ceci signifirait que $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Ceci a été prouvé de deux façons distinctes ; une première fois en utilisant différents ensembles de chemins (*cf.* 4.1) et une deuxième fois grâce à la comparaison de deux formules de récurrence sur les u_i.

2 Polygones

2.1 Énoncé

Soit un polygone convexe à 22 côtés. On veut le découper en triangles dont les sommets soient aussi des sommets du polygone, sans que deux triangles aient des côtés qui se croisent. De combien de manière est-ce possible ?

On peut considérer, sans perte de généralité, que les polygones sont réguliers.
On appelle *triangulation* d'un polygone la figure obtenue après avoir tracé des diagonales du polygone respectant toutes les contraintes de l'énoncé. On définit w_n comme le nombre de triangulations distinctes d'un polygone à $(n+2)$ côtés ($n \in \mathbb{N}^\star$).

2.2 Deux formules de récurrence

Les résultats et les démonstrations de la section ci-après sont dûs à Mathis Paulin et Lucien Xu, élèves de seconde au lycée Blaise Pascal d'Orsay. Nous les avons copié pour que ce compte-rendu soit le plus complet et le plus cohérent possible.

2.2.1 Première formule de récurrence (Orsay)

On suppose que le nombre de diagonales utilisées dans la triangulation d'un polygone à n côtés ne dépend pas de la triangulation[3]. On note d_n ce nombre ($n \geqslant 3$).

Lemme 1. *Pour tout entier $n \geqslant 3$, $d_n = n-3$.*

[3]C'est-à-dire qu'on suppose que le nombre de diagonales dans une triangulation ne dépend que du nombre de côtés du polygone.

Démonstration. Par récurrence forte.

Évidemment la triangulation d'un triangle ne fait apparaître aucune diagonale.

On suppose la propriété vérifiée jusqu'au rang $(n-1)$ (*i.e.* $d_m = m-3$ pour $3 \leqslant m \leqslant n-1$).
On considère un polygone convexe à n côtés. On fixe une diagonale de ce polygone. Elle découpe le polygone à n côtés en deux, un polygone à $(k+1)$ côtés et un polygone à $(n-k+2)$ côtés où $2 \leqslant k \leqslant n-1$. On a

$$d_n = d_k + d_{n-k+2} + \mathbf{1}$$

car il ne faut pas oublier la diagonale du milieu. On a donc grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$d_n = (k-3) + (n-k+2-3) + 1 = n-3.$$

□

Considérons maintenant un polygone convexe à $(n+2)$ côtés.
Si on fixe la diagonale (A_1A_3), on remarque qu'il y a un polygone à $(n+1)$ côtés et un polygone à 3 côtés.
Si on fixe la diagonale (A_1A_4), on remarque qu'il y a un polygone à n côtés et un polygone à 4 côtés.
Si on fixe la diagonale (A_1A_5), on remarque qu'il y a un polygone à $(n-1)$ côtés et un polygone à 5 côtés.
Si on fixe la diagonale (A_1A_6), on remarque qu'il y a un polygone à $(n-2)$ côtés et un polygone à 6 côtés.

$$\vdots$$

Si on fixe la diagonale (A_1A_{n+1}), on remarque qu'il y a un polygone à 3 côtés et un polygone à $(n+1)$ côtés.

On peut trianguler ces deux polygones et on devra alors multiplier leurs solutions pour obtenir w_n en ayant fixé une diagonale (A_1A_k).
Puisque le polygone est régulier, on peut lui faire subir une rotation et recommencer avec un autre sommet. Il y a $(n+2)$ sommets, donc on devra multiplier par $(n+2)$.
Mais si on procède ainsi, on comptera plusieurs fois la même position. Le tout est de savoir combien de fois.

On va regarder combien de fois une droite peut être fixée.
Chaque diagonale d'une configuration peut être obtenue après la fixation de deux points (A_1 et A_3 pour la diagonale (A_1A_3)). Nous avons démontré précédemment qu'il y avait $(n-1)$ diagonales dans la triangulation d'un polygone à $(n+2)$ côtés. Donc une même configuration se reproduit $2(n-1)$ fois. Donc il faut diviser le tout par $2(n-1)$.

La formule de récurrence est donc (avec $n \geqslant 2$) :

$$\boxed{w_n = \frac{n+2}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} w_k w_{n-k}}. \tag{2}$$

2.2.2 Seconde formule de récurrence (Antony)

On s'intéresse au nombre de découpages distincts des polygones à $3, 4, 5$ côtés.

Un triangle peut être découpé d'une unique façon !

Un quadrilatère peut être découpé de deux façons différentes.

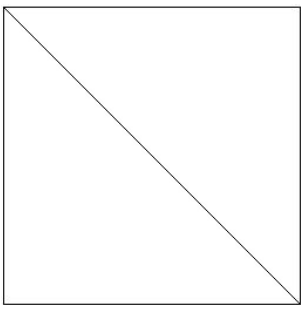

Fig. 4 – Découpage d'un quadrilatère

À une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ près, la Fig. 4 est valable pour toutes les triangulation d'un quadrilatère.
Un pentagone peut être découpé de cinq façons différentes.
À une rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ près, la Fig. 5 est valable pour toutes les triangulations d'un pentagone.

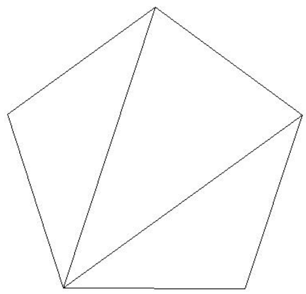

FIG. 5 – Découpage d'un pentagone

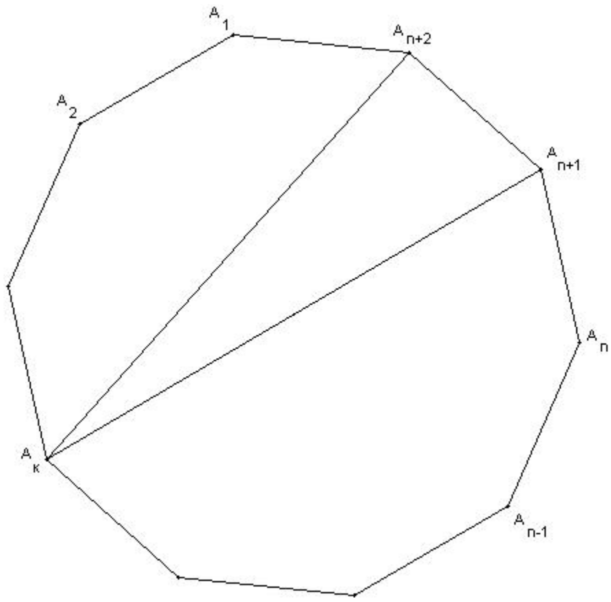

FIG. 6 – Formule de récurrence (polygones)

On a donc : $w_1 = 1, w_2 = 2, w = 3 = 5$. Ces valeurs nous incitent à montrer que les suites (w_n) et (u_n) sont égales.

Considérons un polygone à $(n+2)$ côtés ($n \in \mathbb{N}^\star$).
Le triangle $A_{n+1}A_{n+2}A_k$ découpe le polygone en :

- trois « régions » si $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Le polygone $A_{n+2}A_1 \ldots A_k$ ainsi formé, ayant $(k+1)$ côtés, il existe w_{k-1} triangulations distinctes de ce polygone. De même le polygone $A_k \ldots A_n A_{n+1}$, ayant $(n-k+2)$ côtés, il existe w_{n-k} triangulations distinctes de ce polygone. (Le triangle n'intervient pas car il en existe une seule triangulation.)
- Deux « régions » si $k = 1$ ou $k = n$. Dans ces deux cas, le polygone formé (n'étant pas un triangle) a $(n+1)$ côtés, il existe w_{k-1} triangulations distinctes de ce polygone.

On en déduit que les suites (u_n) et (w_n) sont égales car $u_1 = w_1 = 1$ et elles sont définies par la même formule de récurrence (1).

2.3 Preuve de la conjecture

La formule (1) au rang $(n+1)$ donne :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 2w_n + \sum_{k=1}^{n-1} w_k w_{n-k} \\ &= 2w_n + \frac{2(n-1)}{n+2} w_n \quad \text{d'après (2)} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} w_n. \end{aligned}$$

Un lemme pour conclure !

Lemme 2. *La suite* (w_n) *définie par*

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} w_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et la suite (x_n) *définie par* $x_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *sont égales.*

Démonstration. Ces deux suites ont même premier terme : $w_0 = x_0 = 1$. De plus pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_n > 0$ et

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!}}{\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}} = \frac{(2n+2)!n!}{(n+2)!(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(2n+1)}{n+2}.$$

□

Nous avions remarqué que le rapport de deux termes consécutifs de (u_n) semble tendre vers 4 quand n tend vers l'infini. En effet :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}},$$

si $n \neq 0$. Le numérateur tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers 1.

3 Conclusion

Nous avons montré que le nombre de randonnées envisageables par un montagnard en $2n$ heures, le nombre de façons de découper un polygone à $(n+2)$ côtés, le nombre de façons de ranger n filles et n garçons de manière à ce que où que l'on soit sur la file, le nombre de filles qui sont devant soit supérieur ou égal à celui de garçons qui sont devant[4], *etc.*, sont égaux à $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Pour cela nous avons montré que toutes les suites $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}u_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$,

$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} w_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, $x_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sont égales.

4 Annexes

4.1 Démonstration par les cardinaux

Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des chemins envisageables de longueur de $2n$ et soit $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de tous les chemins de longueur $2n$ ayant autant de montées que de descentes et ayant l'origine du repère O pour origine.
Le cardinal de $\mathcal{E}_n$ est par définition u_n ; de même, celui de $\mathcal{F}_n$ est v_n. On note : $|\mathcal{E}_n| = u_n$ et $|\mathcal{F}_n| = v_n$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. Soit $\mathcal{C}_n$ le complémentaire de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{F}_n$.
Montrer la conjecture équivaut à montrer que

$$|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{F}_n| - |\mathcal{E}_n| = \frac{(n+1)(2n)!}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n}{n+1}.$$

Soit $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des chemins ayant pour origine le point $(-2,0)$ et pour extrémité le point $(2n,0)$.
$|\mathcal{G}_n| = \binom{2n}{n+1}$. En effet la représentation binaire d'un chemin quelconque de $\mathcal{G}_n$ contient $(n+1)$ fois le chiffre 1 et $(n-1)$ fois le chiffre 0.

Ainsi, il suffit de trouver une bijection entre $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{C}_n$ pour montrer (une nouvelle fois) la conjecture.

- **Transformer un chemin de $\mathcal{C}_n$ en chemin de $\mathcal{G}_n$.**
  Tout chemin de $\mathcal{C}_n$ passe au moins une fois en-dessous de l'axe des abscisses (dans le cas contraire se serait un chemin de $\mathcal{E}_n$). On note $[AB]$ le premier segment en-dessous de l'axe des abscisses où $A(a,0)$ et $B(a+1,-1)$.
  On fait subir à la partie du chemin située entre les points O et B une symétrie d'axe d'équation $y=-1$. On laisse l'autre partie du chemin inchangée.
  L'origine du chemin est désormais le point $(-2,0)$: le chemin obtenu est donc bien dans $\mathcal{G}_n$.
- **Transformer un chemin de $\mathcal{G}_n$ en chemin de $\mathcal{C}_n$.**
  Il existe au moins un point d'intersection entre la droite d'équation $y=-1$ et un chemin quelconque de $\mathcal{G}_n$. On appelle B le premier point d'intersection.
  On fait subir à la partie du chemin située entre les points O et B la transformation réciproque de la précédente qui est, elle aussi, la symétrie d'axe d'équation $y=-1$. On laisse l'autre partie du chemin inchangée.
  On obtient bien un chemin de $\mathcal{C}_n$.

[4]Associer 1 à une fille, 0 à un garçon et se ramener aux nombres binaires.

4.2 Compléments

Au cours de nos tentatives pour démontrer la formule explicite de u_n, nous avons trouvé la formule :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \frac{\binom{n}{i}\binom{n+1}{i}}{\binom{2n}{2i}} = 2.$$

Connaissant (1) et l'expression du terme général de (u_n) cette formule peut être facilement démontrée ; sans cela, c'est une autre histoire !

En fin d'année nous nous sommes posés une autre question.
L'ensemble des découpages d'un polygone à n côtés et l'ensemble des chemins de longueur $2n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) ayant le même cardinal, ils sont en bijection. Mais peut-on facilement expliciter cette bijection ?