DES DIDAKTORS NEUE KLEIDER

FRANZ LEMMERMEYER

1. Einführung

Die gefühlten 20 Reformen des Mathematikunterrichts an den baden-württembergischen Schulen, die in den letzten 25 Jahren von oben her durchgedrückt worden sind, haben die Qualität des Unterrichts maßgeblich beeinflusst. Hier wollen wir darzulegen versuchen, welche wesentlichen Punkte sich in didaktischer Hinsicht im Mathematikunterricht des Gymnasiums in den letzten 70 Jahren verändert haben. Dazu vergleichen wir die Mathematik, wie sie in dem 1940 erschienenen Heye-Lietzmann [HL] präsentiert wird, mit derjenigen, die im neuesten Lambacher-Schweizer [LS6, LSA] zu finden ist. Wir beschränken uns dabei im wesentlichen auf die Analysis, da sich andere Gebiete entweder nur schwer vergleichen lassen (Stochastik, Vektorgeometrie) oder seither ganz weggefallen sind (Dreiecksgeometrie, Kegelschnitte, sphärische Geometrie, und praktisch die komplette Algebra).

Es kann kein Zweifel daran bestehen, dass an der Studierunfähigkeit (oder der Studierunwilligkeit: vgl. [Lan]) der G8-Schüler in Baden-Württemberg am Ende wieder die Lehrer Schuld sein werden, deren geistige Trägheit sogar schon in Pressemitteilungen von Universitäten beschrieben wird[1]. Es sei mir daher gestattet, wenigstens einmal mit dem Finger auf diejenigen gezeigt zu haben, die für diese Bildungskatastrophe verantwortlich zeigen: die Didaktoren.

Darunter möchte diejenigen Didaktiker verstanden wissen, die

- fast gar nie unterrichtet haben, aber trotzdem besser als alle Lehrer wissen, was guter Unterricht ist;
- von höherer Mathematik oder deren Anwendung keine Ahnung haben, aber trotzden entscheiden dürfen, welche Inhalte keine für Schüler eine Bedeutung haben und welche nicht;
- die, ohne irgendeine intellektuelle Leistung vollbracht zu haben, aus unerfindlichen Gründen in den politischen Gremien landen, in denen sie dafür sorgen können, dass ihre didaktischen Tagträume in die Realität umgesetzt werden.

Explizit ausschließen möchte ich alle Didaktiker, die durch ihre Arbeit in der Lehrerausbildung dafür Sorge zu tragen versucht haben (vergeblich, wie ich meine), dass im Mathematikunterricht ein gewisses Minimalniveau nicht unterschritten wird.

[1] Die Universität Münster hat sich 1997 Drittmittel von Texas Instruments an Land gezogen. In ihrer Pressemitteilung vom 10. November 1997 wird dann auch das Hohelied des graphikfähigen Taschenrechners (GTR) und der Computer-Algebra-Systeme gesungen. Die halbe Million Mark hat sich für TI finanziell definitiv gelohnt, da der GTR inzwischen in vielen Bundesländern Pflicht ist. Die Lehrer mit Erfahrung haben sich wohl geweigert, auf Befehl ein Hosianna anzustimmen, deswegen haben sich die dazugehörigen Fortbildungen nicht an “Lehrer jenseits der 40” gerichtet, sondern an die jüngeren Lehrer und Referendare.

2. Der Funktionsbegriff

Der Begriff der Funktion ist ein in der Analysis zentraler Begriff, und seine geschichtliche Entwicklung ist verbunden mit Namen wie Euler, Fourier, Dirichlet, Riemann, Cantor und Weierstraß.

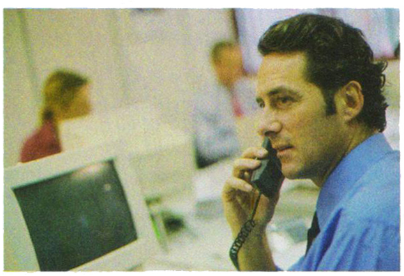
Das Buch [HL] beginnt auf Seite 2 mit einer Erklärung des Funktionsbegriffs:

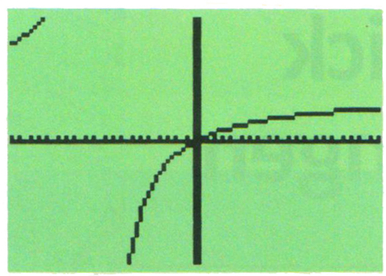
> *Eine Funktion ist eine Zuordnung, durch die jedem Wert einer Veränderlichen ein anderer Wert, der Funktionswert, zugeordnet wird.*

Funktionen brauchen nicht überall definiert zu sein:

> *Der Bereich der Veränderlichen, für die die Funktion erklärt werden kann, heißt Gültigkeitsbereich der Funktion.*

Auch in [LS6] ist der erste Abschnitt dem Thema "Funktionen" gewidmet, und dieser beginnt wie folgt. Auf dem linken Bild sieht man einen netten jungen Herrn am Telefon, auf dem mittleren einen plot einer Funktion,





und im rechten Bildchen den folgenden Text:

> *Der Verkaufsleiter einer Firma liefert für die Verkaufszahlen v eines Produktes in Anhängigkeit der Zeit (in Wochen w) folgende Funktionsgleichung:*
>
> $$v(w) = -\frac{20\,000}{w+10} + 2000.$$
>
> *Die Figur zeigt den Graphen der vorgelegten Funktion. Nimm Stellung.*

Meine Stellungnahme wäre, dass die Vorstellung, Verkaufsleiter würden Funktionen an die Zentrale melden (und das auch noch telefonisch!), meine Phantasie übersteigt. Aber kein Beispiel wäre zu doof, als dass es nicht von Lambacher-Schweizer als eine Anwendung der Mathematik in der Wirtschaft herangezogen würde. Diese Philosophie ist vermutlich direkt den Offenbarungen des Regierungspräsidiums entlehnt; auch dort scheint man von der Idee besessen zu sein, derartige Infantilismen hätten irgendetwas mit angewandter Mathematik zu tun.

Vermutlich haben die Autoren geglaubt, mit derartigem Mummenschanz ließen sich die weniger starken Schüler für Mathematik begeistern. In diesem Fall habe ich eine Überraschung für sie: das ist nicht der Fall.

Der Funktionsbegriff wird in [LS6] nicht geklärt; es wird lediglich bemerkt, dass $y = 4 - 5x^2$ eine Funktion ist, dass diese die Höhe eines fallenden Balls modelliert, und dass man sie graphisch veranschaulichen kann. Dafür wird aber der Definitionsbereich einer Funktion "definiert", und zwar so ([LS6, S. 10]):

> *Die Menge aller Zahlen, die man in die Funktionsgleichung einer Funktion einsetzen darf, heißt* **Definitionsmenge** *der Funktion f. Sie wird mit D_f bezeichnet.*

Dies widerspricht dem Funktionsbegriff, wie er in [LS4] eingeführt wurde: dort war eine Funktion nämlich noch eine Zuordnung. Eine Seite später heißt es dann ([LS6, S. 11]):

> *Die* **Definitionsmenge** *D_f ist die Menge aller x-Werte, auf die f angewendet wird.*

Das scheint mir nicht ganz dasselbe zu sein; aber es kommt noch besser:

> *Fehlt bei einer Funktion die Angabe von D_f, so ist stets die maximale Definitionsmenge gemeint.*

Ach so. Schade nur, dass die maximale Definitionsmenge nirgendwo definiert wurde. Oder sollte das die erste der beiden Definitionen gewesen sein?

Sehen wir davon ab, dass hier überhaupt nichts definiert wurde, und tun wir einmal so, als wüssten wir, was die Autoren gemeint haben könnten; dann bleibt immer noch festzustellen, dass die hinter diesen Definitionsversuchen steckende Auffassung von Funktion (ein Ausdruck, in den man etwas einsetzen darf) gegenüber der Dirichletschen Definition einer Funktion, wie sie in [HL] propagiert wird, einen Rückschritt um 100 Jahre auf die Zeit von Euler bedeutet.

Und was heißt eigentlich "einsetzen darf"? Darf man in eine Funktion $s(t)$, die den Ort eines Objekts für $0 \leq t \leq 10$ beschreibt, $t = 11$ einsetzen? Oder $t = -1$? Und wenn nicht, wer verbietet es einem, und warum? Oder darf man in die Funktion $v(w)$ der Verkaufszahlen $w = 1{,}5$ einsetzen? Und wenn ja, welche Bedeutung hat dieser Funktionswert? Wie viele Schüler erkennen das hier vorliegende Problem? Und schlimmer noch: wie viele der Autoren von Lambacher-Schweizer haben es gesehen?

In der Folge spielen Definitionsmengen keine Rolle mehr, nicht einmal da, wo sie wichtig wären. Ein Jahr später wird die Verkettung von Funktionen in [LSK, S. 56] nämlich so definiert:

> *Gegeben sind die Funktionen u und v.*
> *Die Funktion $u \circ v$ mit $(u \circ v)(x) = u(v(x))$ heißt Verkettung von u und v.*

Probleme bei der Verkettung werden am Beispiel von $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = x^2 - 1$ mit Hilfe der Anzeige eines graphikfähigen Taschenrechners in Beispiel 2 "besprochen". Da Bruchgleichungen (wie überhaupt die komplette Algebra) ebenfalls abgeschafft worden sind, fragt man sich, weshalb auf der Definitionsmenge überhaupt noch herumgeritten wird.

Stetigkeit. Die Stetigkeit einer Funktion wird überhaupt nicht mehr thematisiert: dies ist ein "Wahlthema" in [LSK], und dort wird Stetigkeit über den (nicht vorhandenen) Grenzwertbegriff definiert.

Sehr schön finde ich in diesem Zusammenhang das Fazit von Andrea Paffrath in ihrer Ausarbeitung [Paf] des Stetigkeitsbegriff innerhalb der von ihr besuchten Vorlesung "Didaktik der Analysis":

> *Wie ja schon dargestellt wurde, sieht der Lehrplan die Erarbeitung der Stetigkeit nicht vor. Somit liegt es im Ermessen der Lehrperson,*

> *die Stetigkeit einzuführen bzw. die Differenzierbarkeit über den Stetigkeitsbegriff einzuführen. In der Diskussionsrunde des Seminars konnte man auch keine klare Linie erkennen.*

Herr vergib ihnen, denn sie wissen nicht, was sie tun.

Forschungsaufträge. Diese Art von Einführungen in ein neues Gebiet (Bildchen und ein dümmliches Beispiel) ist didaktorisch der neueste Schrei, und kein Kapitel im Lambacher-Schweizer kommt mehr ohne sie aus. Zu den absoluten Höhepunkten modernen didaktischen Schaffens gehört zweifelsohne der folgende "Forschungsauftrag" aus [LS3]:

Haben Sie's bemerkt? Im dazugehörigen Kapitel geht es um die Existenz von Um- und Inkreisen.

Nicht viel besser, aber eher in der entgegengesetzten Richtung zu verorten ist die Aufgabe 45.(D) auf S. 481[2] aus dem Lehrbuch Mathematik (Duden) für die Kursstufe (im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten):

> *Diskutieren Sie folgende Aussagen: [...] (D) Gott würfelt nicht. (*Albert Einstein*)*

Was gibt es da zu diskutieren, wenn man Podolski-Rosen weder kennt noch versteht?

3. Reelle Zahlen

Nach der Einführung in Potenzgesetze und Logarithmus folgen in [HL] arithmetische und geometrische Folgen und Reihen, sowie die unendliche geometrische Reihe. Der Grenzwert

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}$$

wird geometrisch-anschaulich hergeleitet und dann rechnerisch begründet, indem man

$$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n$$

nachrechnet und bemerkt, dass der zweite Summand auf der rechten Seite für große n gegen 0 geht. Die Anwendungen auf periodische Dezimalbrüche [HL, S. 42] werden den Schülern ebenfalls nicht verschwiegen.

Die Potenzgesetze werden in [HL] und [LS5] ähnlich behandelt: es wird der Fall von rationalen Hochzahlen mehr oder weniger ausführlich diskutiert, dann folgt die Erklärung, was a^x für reelle Zahlen bedeuten soll:

---

[2] Auch das ist eine aus den USA importierte Krankheit: die 519 Seiten des Buchs für die Kursstufe sollen in etwas weniger als drei Halbjahren durchgekaut werden. Wer denkt da nicht an das Stopfen von Gänsen? Auch von Elternseite wird man als Lehrer im Zusammenhang mit G8 des öfteren mit dem Begriff "Bulimie-Lernen" konfrontiert. Und wer ehrlich ist, muss zugeben, dass dieses Wort die Rezeptesammlung im Mathematikunterricht der letzten Jahre treffend umschreibt.

In [HL, S. 22] findet man

> *Da sich nun jede irrationale Zahl mit beliebiger Genauigkeit durch Zehnerbrüche, also durch rationale Zahlen, darstellen lässt, so gilt die Gleichung [$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$] auch mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit für irrationale Zahlen.*

In [LS5, S. 74] wird es ähnlich gemacht:

> *Berechnet man mit dem Taschenrechner $2^{\sqrt{2}}$, so erhält man 2,665144143. Wie lässt sich dieser Wert erklären?*
>
> *Jede irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ kann man auf beliebig viele Nachkommastellen bestimmen. Damit kann man einem Term wie $2^{\sqrt{2}}$ folgendermaßen einen Wert zuordnen:*

$$\begin{array}{llllllll}
1 & < \sqrt{2} & < 2 & 2^1 & < 2^{\sqrt{2}} & < 2^2 & 2 & < 2^{\sqrt{2}} & < 4 \\
1{,}4 & < \sqrt{2} & < 1{,}5 & 2^{1{,}4} & < 2^{\sqrt{2}} & < 2^{1{,}5} & 2{,}639015\ldots & < 2^{\sqrt{2}} & < 2{,}828427\ldots \\
1{,}41 & < \sqrt{2} & < 1{,}42 & 2^{1{,}41} & < 2^{\sqrt{2}} & < 2^{1{,}42} & 2{,}657371\ldots & < 2^{\sqrt{2}} & < 2{,}675855\ldots
\end{array}$$

> [...]*Auf diese Weise kann man bei positiver Basis a für jeden irrationalen Exponenten x die Potenz a^x auf beliebig viele Nachkommastellen bestimmen.*
>
> *Alle Potenzgesetze für rationale Exponenten gelten auch für irrationale Exponenten.*

Hier kann man schön erleben, wie sich man durch den Gebrauch des Taschenrechners die Mühe ersparen kann, über die Bedeutung der reellen Zahlen nachzudenken.

4. Die Definition der Ableitung

In [HL, S. 97] beginnt die Einführung in die Ableitung mit der Frage:

> *Was versteht man unter "Geschwindigkeit"?*

Es folgt ein Beispiel zur Geschwindigkeit eines Zugs, die Formel $s = c \cdot t$ für die gleichförmige Bewegung, und die Beobachtung, dass der zurückgelegte Weg bei der Bewegung auf einer Geraden eine Funktion der Zeit ist. Nach diesem Einführungsbeispiel folgt der eigentliche Aufhänger, nämlich der Abschnitt "§ 28. Geschwindigkeit bei geradliniger Bewegung".

Danach wird die Formel $s = c \cdot t$ für die gleichförmige geradlinige Bewegung gegeben, und dann erklärt, dass bei jeder geradlinigen Bewegung die Strecke s eine Funktion der Zeit t ist: $s = f(t)$. Die Momentangeschwindigkeit, die man auf dem Tachometer (in [HL] Geschwindigkeitsmesser genannt) ablesen kann, ist aber noch nicht das Endprodukt; vielmehr heißt es

> *Diesen technisch geläufigen Begriff heißt es nun mathematisch erfassen.*

Es folgen Überlegungen zur Momentangeschwindigkeit, die in der Definition der Ableitung münden. Nach einer graphischen Veranschaulichung der Begriffe Tangente und Grenzwert wird die Ableitung einer Funktion in x_0 als der Grenzwert des Differenzenquotienten gegeben.

Jetzt folgt der Transfer mit folgendem

> *IV. Satz: Die Augenblicksgeschwindigkeit im Zeitpunkt t_0 ist gleich der Ableitung der Weg-Zeit-Funktion an der Stelle t_0*

$$s = f(t), \qquad v(t_0) = f'(t_0).$$

Auf [HL, S. 105] in den Aufgaben 15 und 16 wird auch noch die kreisförmige Bewegung und der Zusammenhang zwischen Ableitung und Winkelgeschwindigkeit diskutiert.

Endlich kommt auf [HL, S. 105] die "allgemeine Formel für die Ableitung":

> *Die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist*
> $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Auch die alternative Formulierung
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
wird angegeben.

Man beachte die veraltete didaktische Aufbereitung:

(1) Motivation des Begriffs der Ableitung in einem physikalischen Kontext;
(2) Abstrahierung des mathematischen Begriffs der Ableitung;
(3) Anwendung des mathematischen Begriffs auf die Physik;
(4) Verallgemeinerung auf nicht geradlinige Bewegungen.

Heutzutage wird das anders gemacht!

Der Ableitungsbegriff im Lambacher-Schweizer. Die Einführung in den Ableitungsbegriff in [LS6] ist überschrieben mit "Der genaue Blick auf Veränderungen". Veränderungen kann man in der Tat feststellen, wenn man die älteren Bücher noch kennt. Mit Genauigkeit ist es aber nicht weit her: ohne eine vernünftige Definition des Grenzwertes muss notwendig auch die Definition der Ableitung verschwommen bleiben. Lambacher-Schweizer [LS6, S. 17] definiert den Grenzwert wie folgt:

> *Für eine Kugel, die eine schiefe Ebene hinunterrollt, gelte für den nach der Zeit t zurückgelegten Weg*
> $$s(t) = 0{,}3 \cdot t^2$$
> *(t in Sekunden, $s(t)$ in Meter). Um eine Aussage über die momentane Geschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt $t = 1$ s nach dem Start zu erhalten, werden die mittleren Geschwindigkeiten für immer kleinere Zeitintervalle betrachtet:*

Dann geht es so weiter:

> *Um die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kugel (in m/s) zu bestimmen, werden die mittleren Änderungsraten von $s(t)$ (in m/s) für die Messintervalle h (in s) berechnet:*

Ein unbedarfert Leser könnte nun auf die Frage kommen, wieso hier plötzlich von Messintervallen die Rede ist: erst wird der zurückgelegte Weg als Funktion vorgegeben, und nun wird plötzlich von Messintervallen geredet. Was wurde denn jetzt eigentlich gemessen? Die Erklärung liefert ein Vergleich mit dem Vorgängerbuch [LS11, S. 121]; dort tauchten nämlich zumindest im Prinzip noch Messergebnisse auf, und zwar solche, die Galilei mit "den damals üblichen Längen- und Zeiteinheiten [erhalten haben] könnte". Gerne hätte man über die damals üblichen Zeiteinheiten mehr gewusst, aber offenbar waren auch die Autoren an dieser Stelle mit ihrem Latein am Ende.

Nebenbei sei bemerkt, dass mit Messintervalle hier Zahlen und keine Intervalle gemeint sind. Oder auch nicht, denn eigentlich geht es ja schon um die Intervalle $[1, 1+h]$, auch wenn diese nicht explizit angegeben sind. Jedenfalls werden die Geschwindigkeiten in den "Messintervallen h" mit h = 1 s, h = 0,5 s und h = 0,1 s bestimmt:

$$\frac{0,3 \cdot (1+1)^2 - 0,3 \cdot 1^2}{1} = 0{,}9$$
$$\frac{0,3 \cdot (1+0,5)^2 - 0,3 \cdot 1^2}{0,5} = 0{,}75$$
$$\frac{0,3 \cdot (1+0,1)^2 - 0,3 \cdot 1^2}{0,1} = 0{,}63.$$

Nach einer kurzen graphischen Veranschaulichung kommt jetzt die Definition des Grenzwerts:

> *Die mittlere Änderungsrate* $\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$ *zeigt ein bemerkenswertes Verhalten: Obwohl der Zähler und der Nenner des Differenzenquotienten gegen Null gehen, nähert sich der Differenzenquotient dem festen Wert 0,6. Dieser Wert wird* **Grenzwert** *genannt.*
>
> *Hierfür schreibt man:*
>
> $$\textit{Für } h \longrightarrow 0 \textit{ gilt: } \frac{s(1+h)-s(1)}{h} \longrightarrow 0{,}6$$
>
> $$\textit{(lies: Für } h \textit{ gegen 0 geht } \frac{s(1+h)-s(1)}{h} \textit{ gegen } 0{,}6).$$

Das war's dann mit der Definition von Grenzwert. Ein starkes Stück, wenn auch schwer zu sehen ist, wie es ohne Folgen, ε und δ besser ginge, sieht man einmal davon ab, dass diese Definition, so wie sie dasteht, falsch ist: die mittleren Steigungen 0.9, 0.75, 0.63 nähern sich auch der 0.5 oder der 0 oder sämtlichen Zahlen ≤ 0.6, während es doch beim Grenzwert wie bei Highlander sein sollte: es kann nur einen geben.

Obwohl die Ableitung mit Hilfe von Weg-Zeit-Diagrammen und der Geschwindigkeit eingeführt worden ist, wird der Zusammenhang zwischen Ableitung und Momentangeschwindigkeit im Lambacher-Schweizer nicht präzisiert, sondern (so wie alles andere auch) mittels Beispielen "erklärt".

- [LS6, S. 20, Aufg. 7] *Ein Fahrzeug wird abgebremst. Für den in der Zeit (t in Sekunden) [sic!] zurückgelegten Weg* $s(t)$ *(in m) gilt* $s(t) = 20t - t^2$ *für* $t \in [0, 10]$.

  Unter den Fragen hierzu findet man "Welche Bedeutung hat die momentane Änderungsrate?"
- [LS6, S. 24, Aufg. 11] *Beschleunigt ein Auto aus dem Stand mit der Beschleunigung a (in m/s²), so gilt für den zurückgelegten Weg:* $s(t) = \frac{1}{2}at^2$. *Die momentante Änderungsrate* $s'(t)$ *ist die Geschwindigkeit* $v(t)$ *(in m/s) des Autos.*
- [LS6, S. 32, Aufg. 6] *Wird ein Ball senkrecht in die Luft geworfen, so lässt sich die Höhe h (in m) gegenüber dem Boden mit der Formel* $h(t) = h_0 + v_0 t - 5t^2$ *bestimmen. Hierbei ist* h_0 *die Abwurfhöhe (in m),* v_0 *die Abwurfgeschwindigkeit (in m/s), und t die Flugzeit (in s).*

Nun hat man also den Grenzwertbegriff mehr oder weniger physikalisch eingeführt und weiß (oder könnte wissen), dass bei geradlinigen Bewegungen $s'(t) = v(t)$ die Geschwindigkeit und $v'(t) = a(t)$ die Beschleunigung ergibt; da wäre es, so könnte man meinen, an der Zeit, die Kraft des Kalküls auf die beschleunigte Bewegung loszulassen und zu erklären, warum bei konstanter Erdbeschleunigung $a(t) = -g$ die Geschwindigkeit eines senkrecht nach oben geworfenen Balls gleich $v(t) = v_0 - gt$ und die Höhe $h(t) = h_0 + v_0 t - 5t^2$ sein **muss**.

An dieser Stelle ist den Autoren der Grundgedanke der Differentialrechnung vollkommen unverstanden geblieben: sie ist nicht mehr das Band, das Einzelphänomene erklären kann, vielmehr wird hier (wie an andern Stellen) der Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung nur mehr angedeutet, aber nicht mehr begründet. Nicht einmal die Tatsache, dass $s(t)$ und $s'(t)$ andere Einheiten haben, wird auch nur irgendwie zu erklären versucht (das wird nicht einmal später bei den Integralfunktionen gemacht); vielmehr wird es dem Schüler als vollendete Tatsache vor die Nase gesetzt, und die Anwendung der Mathematik verkommt zu einer Sammlung von Kochrezepten. Einen stichhaltigen Grund, warum hier auf jedwede Erklärung verzichtet wird, habe ich auch nach längerem Nachdenken nicht finden können.

Die Einschränkung auf "geradlinige" Bewegungen wird ebenfalls nirgends diskutiert; das ist ein Fehler, für den Schüler unter Umständen erst bestraft werden, wenn ihnen im Abitur die Bewegung einer Kabine am Riesenrad vorgelegt wird, und sie nicht merken, dass die Angabe der Höhe $h(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit es nicht erlaubt, mit $h'(t)$ die Geschwindigkeit der Kabine auszurechnen, weil $h'(t)$ nur die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung bedeutet. Aber so ist das eben mit unverstandenen Kochrezepten.

Auch bei der Einführung der zweiten Ableitung lässt [LSA] eine klare Linie vermissen und kommt wieder mit den nicht definierten Links- und Rechtskurven daher. Ganz anders Heye-Lietzmann: in [HL] wird die zweite Ableitung im Zusammenhang mit beschleunigter Bewegung einführt, was ja durchaus konsequent ist. Weiter ist dem schiefen Wurf ein ganzes Kapitel [HL, § 55] gewidmet, in dem ausgehend von $a(t) = -g$ alles hergeleitet wird, von der Parabelbahn bis zur "Gipfelhöhe". Und danach wird auf einigen Seiten noch erklärt, wie man den Luftwiderstand unterbringen kann. Natürlich ist dies nicht ganz ohne Hintergedanken gemacht worden ("Stelle die Gleichung der Bombenflugbahn auf!"), aber das könnte man sicherlich auch durch den freien Fall von Gummibärchen ersetzen.

5. Ableitung der Grundfunktionen

Die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ wird in [HL, S. 112] wie folgt erklärt: es wird vorgerechnet, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

ist; nimmt man den $\lim_{x \to x_0}$, erhält man daraus die Ableitung $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Übrigens wird für Polynome $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ gezeigt, dass sie genau dann eine Nullstelle in $x = x_0$ haben, wenn $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$ für ein Polynom f_1 vom Grade $n - 1$ gilt, und der Beweis (selbstverständlich wird das bewiesen) wird ebenfalls mit dieser geometrischen Reihe geführt: es ist ja

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(x_0) &= a_0(x^n - x_0^n) + a_1(x^{n-1} - x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x - x_0) \\ &= (x - x_0)f_1(x), \end{aligned}$$

weil man aus jeder Klammer $x - x_0$ nach vorne ziehen kann. Es folgt dann die lapidare Bemerkung

> *Der Beweis liefert gleichzeitig ein Verfahren, um die Abspaltung des Faktors $(x - x_0)$ wirklich auszuführen.*

Offenbar konnte man damals von den Lesern erwarten, dass sie den Inhalt dieser Bemerkung verstehen würden.

Im Lambacher-Schweizer hat man die seit Jahrhunderten bekannte Erkenntnis, dass sich die Potenzfunktion ohne binomische Formeln ableiten lässt, wieder vergessen. Auf [LS6, S. 33] findet man die Bemerkung

> *Für $n = 4$ erhält man $(x_0 + h)^4 = x_0^4 + 4hx_0^3 + 6h^2x_0^2 + 4h^3x_0 + h^4$,*

und der allgemeine Fall wird abgehandelt wie folgt: es wird plausibel gemacht, dass $(x_0 + h)^n = x_0^n + n \cdot h \cdot x_0^{n-1} + h^2 \cdot (\ldots)$ ist, und dann lässt man im Differenzenquotienten $h \longrightarrow 0$ gehen.

Für negative ganze Exponenten z, sagt das Buch, sei die Ableitung von x^z "aufwändiger" (in [HL, S. 147] wird der Beweis natürlich gegeben, und zwar als Korollar der Quotientenregel; die ist dem G8-Lehrplan allerdings zum Opfer gefallen); bei den Ableitungsregeln steht am Ende des Kapitels nur diejenige von $f(x) = x^z$ für $x = z$. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ wird in [LS6, S. 24] in einer Aufgabe 8 abgehandelt, ohne dass das Ergebnis festgehalten wird. Die Bemerkung, dass die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ ein Spezialfall der Potenzregel ist, weil $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ist, sucht man im ganzen Buch vergeblich. Dies wird dem geneigten Leser erst in [LSA, S. 18] verraten, im Kapitel "Wiederholung der Ableitungsregeln", und zwar ohne die Bemerkung, dass das bisher nur für natürliche Zahlen "hergeleitet" und für ganze Zahlen postuliert worden ist.

Exponentialfunktion. Selbst die Exponentialfunktion muss unter der Verfügbarkeit von Taschenrechnern leiden. Die Idee des Wachstums wird spätestens in Klasse 9 durch diskrete Beschreibungen thematisiert, d.h. es wird lineares Wachstum $B(n{+}1) = B(n){+}a$ von exponentiellem Wachstum $B(n{+}1) = aB(n)$ unterschieden. Diese Idee wird durchgezogen bis Klasse 11, wo die Exponentialfunktion aber nicht als Grenzfunktion ihres diskreten Pendants eingeführt wird, sondern als diejenige unter den Potenzfunktion $f(x) = a^x$ mit der Eigenschaft $f'(x) = f(x)$. Weder wird deren Existenz mit irgendetwas begründet, was über das Anglotzen des Bildschirms eines graphikfähigen Taschenrechners hinausginge, noch wird später die Ableitung der andern Potenzfunktionen a^x bestimmt.

Diese Art von Didaktik ist kreationistischer Natur: man fragt nicht nach dem Zusammenhang, sondern schafft sich eine black box nach der andern, um am Ende ein Sammelsurium von Objekten zu haben, die die meisten Schüler nicht mehr überblicken können. Es ist eine didaktische Meisterleistung, das Niveau zu senken und gleichzeitig das Material unübersichtlicher zu machen.

Die Umkehrfunktion. In [HL, S. 141] wird die Umkehrfunktion monotoner Funktionen (dort einsinnig genannt) geometrisch veranschaulicht, und auch die Ableitung wird geometrisch hergeleitet: die Tangente der Umkehrfunktion g von f wird gewonnen, indem man die Tangente an f an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten spiegelt.

Im Lambacher-Schweizer wurde der Begriff “Umkehrfunktion” in den Bereich “Exkursion in die Theorie” verbannt, der nicht zum Standardstoff gehört. Die Umkehrfunktion $\arcsin x$ taucht beispielsweise nur noch als Taste $\sin^{-1}$ auf dem Taschenrechner auf. Deswegen wird $\sin^{-1}$ auch nicht als Funktion wahrgenommen, und wenn man Schüler nach der Ableitung dieser Funktion fragen würde, kämen die besseren unter ihnen sicherlich mit $-\sin^{-2}(x) \cdot \cos(x)$ daher.

6. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

In [HL] wurden die Winkelfunktionen wie heute am Dreieck eingeführt, allerdings folgt die Erklärung am Einheitskreis viel schneller als heutzutage. Selbstverständlich werden in [HL] auch Sinussatz, Cosinussatz und die Additionstheoreme noch behandelt, ebenso wie später die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen mit Beweis vorgestellt werden.

In [LS11] wird die Ableitung der Sinusfunktion vorgerechnet, wobei “aus einer Formelsammlung” die beiden Identitäten

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2},$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

benutzt werden. Warum man “aus der Formelsammlung” nicht gleich abgelesen hat, dass $f(x) = \sin x$ die Ableitung $f'(x) = \cos x$ besitzt, blieb das Geheimnis des Lehrbuchs.

Es war daher aus didaktischer Sicht nur konsequent, die ganzen Begründungsversuche zu streichen, und in der Tat findet man in [LS6, S. 123] nur noch die Bemerkung, dass die Ableitung von $\sin x$ auf dem GTR aussieht wie $\cos x$, jedenfalls wenn man ihn zuvor auf Bogenmaß eingestellt hat.

Warum man das Bogenmaß überhaupt einführt, bleibt in allen betrachteten Lehrbüchern eine unbeantwortete Frage, die zu beantworten bisher wohl niemand gewagt hat. Nicht einmal nach Bereitstellung der Kettenregel wird erklärt, was die Ableitung von $f(\alpha) = \sin\alpha$ ist, wenn α in Grad gemessen wird. Stattdessen wird den Schülern beigebracht, dass man in Analysis Bogenmaß und in der Geometrie Grad nehmen muss. Einmal mehr wird hier mit Kochrezepten hantiert, eine Erklärung wird nicht einmal ansatzweise versucht.

7. Ableitungsregeln

In [HL] werden die Ableitungsregeln alle bewiesen: die Summenregel auf S. 116, die Produktregel auf S. 117, und zwas beide mit Hilfe der Steigungswinkel. Die Quotientenregel dagegen wird auf S. 136 direkt aus der Definition der Ableitung abgeleitet. Die Ableitung von Umkehrfunktionen wird wieder mit Steigungswinkeln erklärt und auf die Ableitung von $f(x) = \sqrt[n]{x}$ angewandt. Die Kettenregel für eine zusammengesetzte Funktion “an der Stelle x_0 (an der die Funktion natürlich erklärt sein muss)” schließlich wird mit Beweis auf S. 150–151 präsentiert.

Ganz anders wird im neuen Lambacher-Schweizer verfahren: die Kettenregel wird, da bleibt das Buch seiner Linie treu, auf S. 59 am Beispiel $f(x) = \sin(3x)$ plausibel gemacht; bei der Formulierung der Kettenregel wird das Problem des Definitionsbereiches nicht angesprochen. Die Produktregel folgt mit Beweis auf S. 62, wobei das Einschieben der Hilfsglieder geometrisch an Hand von Rechtecken veranschaulicht wird. Die Quotientenregel folgt auf S. 64 aus Produkt- und Kettenregel, auch wenn sie derzeit nicht mehr zum Pflichtstoff gehört. Die Ableitung der Logarithmusfunktion wurde in den Abschnitt “Exkursion in die Theorie” verbannt; auf S. 99 erscheint der Logarithmus dann aber als Stammfunktion von $\frac{1}{x}$:

> *Eine Stammfunktion zu f mit $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ findet man in Zusammenhang mit dem natürlichen Logarithmus.*

8. Das Integral

Wer noch nicht genug hat: das Integral wird in [LSA, S. 92] über spezielle Riemannsummen

$$A_n = f(z_1) \cdot \Delta x + \ldots + f(z_n) \cdot \Delta x$$

für differenzierbare[3] Funktionen f erklärt. Der Grenzwert nennt sich dann Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, wenn $F' = f$ ist; der Begriff integrierbar wird nicht erwähnt, außer dass auf S. 126 das Beispiel der Dirichlet-Funktion gegeben wird, bei der Riemannsummen verschiedene Grenzwerte ergeben. Vorgerechnet wird das allerdings nicht.

Weiter unten auf derselben Seite steht als Zugabe, dass jede Integralfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion, aber nicht umgekehrt ist. Erstaunlicherweise haben die Autoren kurz zuvor die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1, \\ 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

betrachtet und festgestellt, dass die Integralfunktion $\int_0^x f(t)\,dt$ in $x = 1$ nicht differenzierbar ist. Vermutlich sind hier wieder die Integralfunktionen von differenzierbaren Funktionen gemeint, aber dies hätte man nach den ganzen Beispielen von nicht stetigen Funktionen vielleicht erwähnen können.

Der alte Lambacher Schweizer. Es ist dagegen geradezu eine Wohltat, wenn man die moderneren Machwerke mit dem Band Analysis [LSA] aus dem Jahre 1968 vergleicht, das bis Ende der 70er Jahre verwendet wurde, um dann für kurze Zeit durch ein pädagogisch wenig erfolgreiches, aber deutlich anspruchsvolleres abstrakteres Lehrbuch ersetzt zu werden, das ganz auf den Cauchyschen ε-δ-Definitionen und den Mittelwertsätzen aufgebaut war. Wenn man sich die Namen ansieht, die sich für [LSA] verantwortlich gezeigt haben, ist das pädagogische Geschick auch kein Wunder: neben Wilhelm Schweizer selbst stehen dort Namen wie Arthur Engel (der jahrelang die deutsche IMO-Mannschaft betreut hat) oder Paul Sengenhorst, ein Schüler von Helmut Hasse.

[3] Da blieb den Autoren keine Wahl, da der Stetigkeitsbegriff nicht mehr zum Lehrplan gehört.

9. Definition, Satz, Beweis? Fehlanzeige

Ein modernes Schulbuch der Mathematik zeichnet sich vor allem durch folgende Eigenschaften aus:

- Bunte Bilder. Viele viele bunte Bilder.
- Eine Ansammlung unzusammenhängender Themen, mit Problemen, die von unzusammenhängenden Methoden gelöst werden sollen, am besten jedoch durch das Eintippen in den graphikfähigen Taschenrechner.
- Ein Mangel an Standard-Übungsaufgaben, die durch fürchterlich infantile Aufgaben und "Forschungsaufträge" ersetzt worden sind.
- Ein durchgehendes Fehlen von Definitionen, was Beweise vollkommen unmöglich macht. Konsequenterweise werden die noch verbliebenen Beweistechniken (vollständige Induktion, Beweise mit Vektoren) nun auch noch abgeschafft.

Es ist ein didaktischer Fehlschluss zu glauben, dass das Ersetzen präziser Definitionen durch Erklärungen an Hand von Beispielen für Schüler vorteilhaft ist, weil sie den Kerngehalt mathematischer Objekte dadurch besser begreifen würden. Schüler, die früher nicht begriffen haben, was ein Grenzwert ist, begreifen auch heute nicht, was es mit dem Verhalten von Funktionen für x gegen ∞ auf sich hat; der Unterschied zu früher ist, dass gute Schüler das heute auch nicht mehr begreifen, weil ihnen das Leben durch fehlende Genauigkeit schwer gemacht wird. Ich will dies an zwei Beispielen aufzuzeigen versuchen: Asymptoten und die lineare Substitution in der Integralrechnung.

Zuvor seien allerdings noch die Definitionen der Grundobjekte des Analysisunterrichts angeführt, wie man sie im neuen Lambacher-Schweizer findet.

Maxima und Minima. Beginnen wir mit der Definition von lokalen Maxima und Minima; diese wird in [LS6, S. 54] so erledigt:

> *Wenn der Punkt $H(x_0|f(x_0))$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist, so nennt man $f(x_0)$* **lokales Minimum***.*

Ganz analog werden lokale Maxima definiert. Warum man sich überhaupt die Mühe macht, irgend eine **lokale** Größe zu definieren, ohne einen dazugehörigen Umgebungsbegriff zu entwickeln, wüsste man schon gern. Nun ja, so irgendwie wird das schon gemacht, zumindest auf Seite 44, wo Tief- und Hochpunkte definiert werden: in einer Skizze wird das Schaubild einer Funktion mit zwei Tiefpunkten T_1, T_2 und einem Hochpunkt H präsentiert und dann lapidar gesagt:

> *Punkte wie T_1 und T_2 in Fig. 1 heißen* **Tiefpunkte***, da benachbarte Punkte keine kleineren y-Werte haben. Entsprechend heißt H* **Hochpunkt***.*

Den terminus technicus "benachbarte Punkte" dürfen sich Lehrer, die noch eine Ahnung von ihrem Fach haben, auf der Zunge zergehen lassen.

Man mag sich jetzt die Frage stellen, ob es ausreicht, die grundlegenden mathematischen Objekte, mit denen sich Schüler zu beschäftigen haben, an hand von Beispielen zu "definieren". Zum Glück für uns alle wird diese Frage von Lambacher-Schweizer selbst beantwortet: in [LS4, S. 128] heißt es nämlich

> *Beim Definieren genügt es nicht, nur Beispiele anzugeben.*

Erfahrungsgemäß sind die meisten 8-Klässler heutzutage von dem Kapitel "Definieren, Ordnen und Beweisen" in [LS4] überfordert, auch deswegen, weil das Beweisen in Geometrie weggefallen ist und durch Nichts ersetzt worden ist. Allem Anschein nach tun sich aber auch Lehrbuchautoren damit schwer, ihren eigenen Maximen zu folgen.

Im neuesten Buch [LSLK] für den nichtexistenten Leistungskurs findet sich auf S. 46 immerhin ein Definitionsversuch von lokalen Maxima und Minima:

Definition. *Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 ein* **lokales Maximum** $f(x_0)$, *wenn es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, sodass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) \le f(x_0)$.*

Es ist durchaus lobenswert, dass hier wenigstens der Versuch gemacht wird, eine saubere Definition zu geben; noch lobenswerter wäre es natürlich gewesen, wenn die Autoren jemanden gefragt hätten, der weiß, wie man es richtig macht. Jedenfalls lag es wohl nicht in der Absicht der Schreiber, jeden Punkt $(x_0|x_0)$ auf der Geraden $y = x$ zum lokalen Maximum zu erklären, wie das die Wahl $I = [x_0 - 1, x_0]$ ja wohl nahelegt.

Wendepunkte. Die Definition von Wendepunkten im Lambacher-Schweizer ist, gelinde formuliert, einigermaßen erstaunlich (nicht nur wegen der etwas gewöhnungsbedürftigen Zeichensetzung):

> **Definition:** *Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert, differenzierbar und x_0 sei eine innere Stelle im Intervall I.*
>
> *Eine Stelle x_0, bei der der Graph von f von einer Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt, heißt* **Wendestelle** *von f bei x_0.*
>
> *Der zugehörige Punkt $W(x_0|f(x_0))$ heißt* **Wendepunkt**.

Der Begriff Links- bzw. Rechtskurve wurde davor am Beispiel zweier Schaubilder von kubischen Parabeln "erklärt".

9.1. **Asymptoten.** Bis vor kurzem waren die Objekte senkrechte, waagrechte und schiefe Asymptoten noch im Programm. Eine ordentliche Definition dafür gab es natürlich nicht, und auch die Methoden zur Berechnung der Asymptoten wurden nicht wirklich begründet. Das führte in diesem Fall zwangsläufig zur Verwirrung eines erklecklichen Anteils der Schüler, denen das ganze wie ein Sammelsurium unzusammenhängender Methoden vorkommen musste.

Waagrechte Asymptoten hat man jedenfalls so bestimmt: war eine rationale Funktion
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$
gegeben, so hatte man
$$\frac{2x+1}{x+1} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \longrightarrow \frac{2+0}{1+0} = 2$$
zu rechnen, und die waagrechte Asymptote war dann $y = 2$.

Dieselbe Rechnung führt bei
$$g(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$$
auf das Ergebnis
$$\frac{2x^2+1}{x+1} = \frac{2x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \longrightarrow \frac{2x+0}{1+0} = 2x,$$

allerdings war das Ergebnis falsch: $y = 2x$ ist nicht die schiefe Asymptote. Diese musste man vielmehr durch Polynomdivision bestimmen, was auf

$$(2x^2 + 1) = (x + 1)(2x - 2) + \frac{3}{x + 1}$$

und die schiefe Asymptote $y = 2x - 2$ führte.

Auf die Frage, warum die erste Rechnung bei waagrechten Asymptoten erlaubt ist, bei der zweiten dagegen nicht, gibt das Lehrbuch keine Antwort.

Hier rächt sich nun, dass weder Asymptoten, noch der Grenzwertbegriff halbwegs exakt definiert wurden. Natürlich kann man mit Handwedeln so einiges zu erklären versuchen, aber durch den Verzicht auf eine genaue Definition wird Mathematik zum Sammelsurium unzusammenhängender und vollkommen willkürlicher Regeln.

Das Problem hinter den beiden verschiedenen Methoden ist, dass es verschiedene Begriffe von asymptotischen Näherungen gibt: so man kann $f(x)/g(x) \longrightarrow 1$ oder aber auch $f(x) - g(x) \longrightarrow 0$ verlangen. Hier beginnt Mathematik, also hört Lambacher-Schweizer in sicherem Abstand davon auf. Ich kann das Leid der Didaktiker durchaus nachempfinden: durch das Fehlen eines exakten Grenzwertbegriffs wurde es unmöglich gemacht, Asymptoten zu definieren und sauber zu begründen, warum der Standardalgorithmus funktioniert. Anstatt den Begriff der Asymptote dann als nicht mehr vermittelbar aufzugeben, hat man auf die Grenzwertschwurbelei dann noch ein Asymptotengefasel draufgesetzt. Da Lehrer nicht die Zeit haben, den Grenzwertbegriff samt des dazu notwendigen Apparats von Folgen usw. auf den ohnehin schon riesigen Materialberg im G8-Zug draufzupacken, und weil die Berechnung von Asymptoten im Abitur verlangt wird, bleibt ihnen nicht viel anderes übrig als dem Weg des miserablen Lehrbuchs zu folgen und Dinge zu unterrichten, die mit Mathematik wenig bis nichts zu tun haben. Mathematisch denken lernen die Schüler dabei jedenfalls nicht.

9.2. **Lineare Substitution.** Noch schlimmer sieht es bei der linearen Substitution aus, dem kläglichen Rest der Substitutionsregel in der Integralrechnung, den die Didaktiker bei der Plünderung mathematischer Inhalte noch übrig gelassen haben.

Die Begründung der Regel der linearen Substitution (also Substitutionen der Form $z = ax+b$) in [LSA, S. 101] sieht wie folgt aus: ausgehend von $h(x) = (5x+1)^3$ findet man dort die denkwürdige Passage

> *Eine Stammfunktion zur Verkettung h ist H mit*
>
> $$H(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot (5x + 1)^4 = \frac{1}{20}(5x + 1)^4.$$

Weitere Erklärungen werden nicht für nötig befunden. Nun ist 5, so viel kann sich der Schüler vielleicht zusammenreimen, die "innere Ableitung" der Funktion $h(x)$. Also, wird er wohl denken, kann man die Stammfunktion von $g(x) = (x^2+1)^3$ so ausrechnen:

$$G(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x} \cdot (x^2 + 1)^4.$$

Das ist natürlich falsch, wie man durch Ableiten leicht feststellt; aber warum funktioniert die Methode bei $h(x)$, nicht aber bei $g(x)$?

Die Erklärung des Lehrers muss sich aus den bekannten Gründen darauf beschränken, dass diese "Methode" nur dann funktioniert, wenn die innere Ableitung konstant ist (vielleicht hätte es auch dem Lehrbuch gut angestanden, diese Tatsache zu erwähnen) – was manche Schüler nicht davon abhält, diese Mahnung bei nächstbester Gelegenheit wieder zu vergessen.

Auch hier wurde durch die Abschaffung einer Technik, die immer richtige (wenn auch manchmal nicht brauchbare) Resultate lieferte (ich rede von der Substitutionsregel bei Integralen, bei der die Leibnizschen Differentiale (die gleich mit abgeschafft wurden, außer als Menüpunkt beim GTR) ihre ganze Pracht zeigen durften), eine Methode geschaffen, die manchmal richtige und manchmal falsche Ergebnisse liefert.

10. Die Entwicklung der Aufgabenkultur

10.1. **Aufgaben aus dem Jahre 1940.** Mathematikaufgaben aus der Zeit des Nationalsozialismus sind berüchtigt; im Internet findet man viele Zusammenstellungen solcher Aufgaben wie der folgenden, die man eigentlich nicht kommentieren muss:

> *Die durchschnittlichen Baukosten einer Kleinwohnung betragen 5.000 bis 7.000 RM. 1934 wurden rund 284.000 Wohnungen gebaut.*
>
> *Der Bau einer Irrenanstalt kostet etwa 6 Mill. RM. Wieviel Familien könnten dafür eine Wohnung erhalten?*

> *Der jährliche Aufwand des Staates für einen Geisteskranken beträgt im Durchschnitt 766 RM; ein Tauber oder Blinder kostet 615 RM, ein Krüppel 600 RM. In geschlossenen Anstalten werden auf Staatskosten versorgt:*
>
> *167 000 Geisteskranke, 8 300 Taube und Blinde, 20 600 Krüppel. Wieviel Mill. RM kosten diese Gebrechlichen jährlich?*

Daraus sollte man aber nicht schließen, dass zwischen 1933 und 1945 alle mathematischen Unterrichtswerke von vorn bis hinten der NS-Propaganda dienten. Auch in [HL] findet man natürlich Aufgaben, die dem damaligen Zeitgeist entsprechen: Aufgabe 10 von S. 18 befasst sich beispielsweise mit der "Panzerformel" für das Durchschlagen einer Panzerplatte der Dicke d, und auf S. 86 geht es bei den Winkelfunktionen durchweg um Aufgaben aus der Seefahrt (Kriegsschiff, Zerstörer, Schlachtschiff).

Dennoch gab es auch Aufgaben, die es an Qualität mit den heutigen, um es vorsichtig auszudrücken, durchaus aufnehmen können.

Die erste Aufgabe bei der Anwendung von verketteten Funktionen ist die folgende ([HL, S. 152, Aufg. 1]):

> *Ein runder Turm von 10 m innerem Durchmesser hat eine 2,5 m hohe Eingangstür. Wie lang darf ein Balken höchstens sein, den man durch diese Tür ins Innere des Turmes bringen will?*

Natürlich sind hier ein paar vereinfachende Annahmen zu machen, damit sich das Problem halbwegs lösen lässt. Ich würde vermuten, dass heutige Abiturienten mit solchen Aufgaben nicht viel Freude haben dürften, graphikfähiger Taschenrechner hin oder her.

Zur Differentialrechnung gehörte 1940 auch die näherungsweise Bestimmung von Nullstellen mit regula falsi und Newtonverfahren, ebenso wie ein Kapitel über Fehlerrechnung. Auf [HL, S. 162] findet sich dazu u.A. folgende Aufgaben:

Um die Höhe eines Turms zu bestimmen, wird in a m Entfernung von seinem Fußpunkt ein Winkelmessinstrument aufgestellt, mit dem der Erhebungswinkel x nach der Turmspitze gemessen wird.

a) Berechne die Höhe des Turmes!

b) Wie wirkt sich ein Fehler bei der Winkelmessung vom Betrage h an dem Ergebnis aus? Für welche Winkel ist dieser Betrag am kleinsten, für welche am größten?

Hier die zweite:

Ein Baumstamm hat die Form einer Walze vom Halbmesser r und der Länge l. Sein Artgewicht ist $s = \frac{3}{4}$. Bis zu welcher Tiefe sinkt er ins Wasser ein? Untersuche vorher, welche Genauigkeit für die Lösung ausreicht!

Anleitung (Abb. 142): Wähle den Mittelpunktswinkel x im Bogenmaß als Veränderliche!

In [HL, S. 293] geht es um die Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses. In der Aufgabe zuvor wurde ein solcher Verlauf graphisch gegeben (mit Geschwindigkeit 0 am Ufer); in der vorliegenden Aufgabe soll der Verlauf durch eine quadratische Funktion modelliert werden:

Angenähert kann man annehmen, dass die Strömungsgeschwindigkeit nach der Mitte zu nach einem quadratischen Gesetz zunimmt. Bezeichnet man die Entfernung vom Uferrand mit x, so ist also die Geschwindigkeit $v(x)$ eine quadratische Funktion von x.

a) Für einen 25 m breiten Fluss sei die Geschwindigkeit in der Mitte des Flusses 5 m/s. Berechne die Geschwindigkeitsfunktion $v(x)$.

b) Ein Schwimmer überquert den Strom mit einer Eigengeschwindigkeit von 2,5 m/s, die senkrecht zur Stromrichtung gerichtet ist. Bechne seine Bewegungsrichtung in einer Entfernung x vom Ufer! Welche Funktion von x erhältst du für den Tangens des Richtungswinkels?

c) Wie findest du hieraus die Bewegungskurve des Schwimmers? An welcher Stelle gelangt er ans gegenüberliegende Ufer?

Das nenne ich modellieren. Didaktoren von heute verstehen darunter, durch die Verkaufszahlen der letzten 4 Wochen mit Hilfe des GTR eine Regressionsparabel zu legen und den Verkauf im nächsten Jahr daraus zu prognostizieren. A propos prognostizieren: Im heutigen Mathematikunterricht ist jeden Tag Murmeltiertag, nur ohne Sonny & Cher.

10.2. **Aufgaben aus dem 21. Jahrhundert.** Manche der folgenden Aufgaben werden mit dem Adjektiv "erstaunlich" nur unzureichend beschrieben. Manchmal kann man wirklich nicht so viel essen, wie man kotzen möchte.

LS Klasse 9. In [LS5, S. 73] findet man folgende Anwendungsaufgabe:

17. *Der Windchill beschreibt den Unterschied zwischen der gemessenen Lufttemperatur und der gefühlten Temperatur in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit. Er ist damit ein Maß für die windbedingte Abkühlung eines Objektes, speziell eines Menschen und dessen Gesicht. Die Formel zur Berechnung lautet:*

$$WCT = 13{,}12 + 0{,}6125 \cdot T - 11{,}37 \cdot v^{0,16} + 0{,}3965 \cdot T \cdot v^{0,16}$$

(WCT: Windchill-Temperatur in ° C, T: Lufttemperatur in ° C, v: Windgeschwindigkeit in km/h.

Berechne die gefühlte Temperatur (WCT) für eine Lufttemperatur von 10° *C und Windgeschwindigkeiten von 10 km/h, 15 km/h und 20 km/h.*

Denkt man über die seltsame Erklärung des windchills eine Weile nach, gelangt man zur Erkenntnis, dass die windchill-Temperatur beileibe nicht der *Unterschied* zwischen gemessener und gefühlter Temperatur sein soll, sondern die gefühlte Temperatur.

Was die Formel uns sagen will, ist anscheinend auch, dass man bei 0° C und Windstille eine Temperatur von 13° C fühlt. Das kann man glauben, muss es aber nicht.

Wenn bei dieser Frage kein Schüler ein "wozu braucht man das" von sich gibt, hat man als Lehrer wahrscheinlich schon verloren. Sollen solche Probleme die Schüler von der Anwendbarkeit der Mathematik überzeugen, oder eher davon, dass Mathematik ein Zeitvertreib für Leute ist, denen es wirklich ganz ganz ganz arg langweilig ist?

Abitur 2007. Die folgende Aufgabe stammt aus der Abiturprüfung von 2007 (Nachtermin). Nun sind eingekleidete Aufgaben ja nichts Neues; solche der folgenden Form sind aber viel dümmlicher als alle Aufgaben der Art "Wenn ich vor 5 Jahren so alt war wie du jetzt, etc." weil sie suggerieren, Mathematiker würden ohne irgendwelche Daten Verkaufszahlen von MP3-Playern oder CDs vorhersagen können, oder, noch schlimmer, irgendeine Funktion als Modell wählen und dann drauflos rechnen. Wäre diese Aufgabe ein Ausreißer (wie die obige um die Kostenminimierung bei Strahlenopfern), könnte man damit leben. Aber Aufgaben dieser Art sind die Regel. In meinen Augen ist das Rufmord.

> *Eine Firma produziert einen neuen MP3-Player. Marktanalysen haben ergeben, dass die wöchentlichen Verkaufszahlen durch die Funktion f mit*
>
> $$f(t) = 1000te^{-0,1t}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$
>
> *modellhaft beschrieben werden können. (t in Wochen nach Verkaufsbeginn, $f(t)$ in Stückzahl pro Woche.)*
>
> a) *Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f.*
> *Wann sollte die Markteinführung des Gerätes erfolgen, damit das Maximum der wöchentlichen Verkaufszahlen in die erste Dezemberwoche fällt?*
>
> *[...]*
>
> *Mit wie vielen verkauften MP3-Playern kann die Firma im Lauf des ersten Jahres nach Markteinführung etwa rechnen?*

Den Rest ersparen wir uns. Eine Marktanalyse weit vor Verkaufsbeginn erlaubt die Prognose von verkauften Geräten über einen Zeitraum eines Jahres hinweg. Sauber!

Nebenbei sei bemerkt, dass in allen Aufgaben zum Thema Wirtschaft immer nur der Gewinn maximiert werden soll (durch Variation der Verkaufszahlen oder Minimierung der Herstellungskosten), während man vergeblich nach Aufgaben sucht, in denen der Abfall minimiert oder die Anzahl der Beschäftigten möglichst groß gemacht werden sollen. Aber so sind wir Mathematiker halt.

Abitur 2009. Hier geht es um die Fieberkurve eines Patienten, die durch

$$f(t) = 36.5 + t \cdot e^{\cdot 0.1t}$$

gegeben ist (t in Stunden, $f(t)$ in Grad Celsius). Es folgen allerlei Fragen nach Maxima, Wendepunkten und Durchschnittstemperatur, und dann folgt

> *In welchem 2-Stundenzeitraum nimmt die Temperatur um ein Grad zu?*

Auf die Frage von Schülern, wer das wissen will, muss man als Lehrer zugeben, dass die Antwort niemanden interessiert: nicht den Patienten, nicht den Arzt, und den Lehrer schon gar nicht. Ebenso lustig ist das Problem zu zeigen, dass die Temperatur nach ihrem Maximum "dauerhaft unter 37° bleibt". Nun darf man hier, im Gegensatz zu den anderen Fragestellungen, wegen des Befehls "weisen Sie nach" nicht den GTR benutzen und nachgucken, sondern muss z.B. die Funktion von Hand ableiten und zeigen, dass die Ableitung negativ ist, und zwar für immer und ewig. Das Problem, dass dieses Modell bestimmt nicht für die Körpertemperatur der nächsten 10 Jahre gilt, schon gar nicht für die Zeit nach der Explosion unserer Sonne, interessiert hier wenig.

Kernkraftwerke und medizinische Folgekosten. Das folgende Kleinod stammt aus [LS6, Aufg. 5, S. 65].

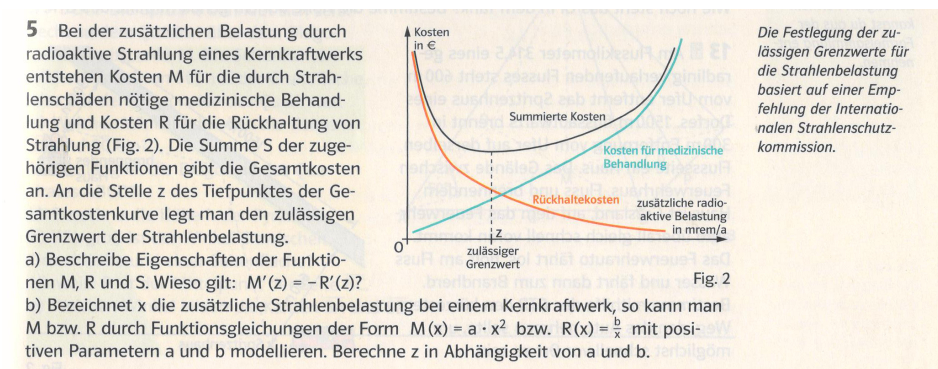

5 Bei der zusätzlichen Belastung durch radioaktive Strahlung eines Kernkraftwerks entstehen Kosten M für die durch Strahlenschäden nötige medizinische Behandlung und Kosten R für die Rückhaltung von Strahlung (Fig. 2). Die Summe S der zugehörigen Funktionen gibt die Gesamtkosten an. An die Stelle z des Tiefpunktes der Gesamtkostenkurve legt man den zulässigen Grenzwert der Strahlenbelastung.
a) Beschreibe Eigenschaften der Funktionen M, R und S. Wieso gilt: M′(z) = −R′(z)?
b) Bezeichnet x die zusätzliche Strahlenbelastung bei einem Kernkraftwerk, so kann man M bzw. R durch Funktionsgleichungen der Form $M(x) = a \cdot x^2$ bzw. $R(x) = \frac{b}{x}$ mit positiven Parametern a und b modellieren. Berechne z in Abhängigkeit von a und b.

Fig. 2

Die Festlegung der zulässigen Grenzwerte für die Strahlenbelastung basiert auf einer Empfehlung der Internationalen Strahlenschutzkommission.

Diese Aufgabe spricht für sich selbst; der Unterschied zu den Einsparungen durch Entsorgung von Behinderten in der NS-Zeit scheint mir eher graduell zu sein.

Energie und Energieverbrauch. Mathematik ist überall, auch in der Biologie. Die folgende Aufgabe [LSA, Aufg. 14, S. 151] ist nachgerade typisch für die moderne Aufgabenkultur.

> *Ein Fisch schwimmt in einem Bach mit der konstanten Geschwindigkeit x m/s relativ zum Wasser. Die Energie E (in Joule), die er dazu benötigt, hängt von seiner Form und von seiner Geschwindigkeit x ab. Aus Experimenten weiß man, dass die Energie mit*
>
> $$E_k(x) = c \cdot \frac{x^k}{x-2}$$
>
> *modelliert werden kann. Hierbei ist $c > 0$ eine Konstante und $k > 2$ ein Parameter, der von der Form des Fisches abhängt: Je "plumper" der Fisch ist, desto größer ist der Parameter k.*

a) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieaufwand des Fisches am geringsten?

b) Erläutern Sie, wie die energiesparendste Geschwindigkeit eines Fisches von seiner Form abhängt.

Auf die beiden Bildchen (schlanker Fisch mit kleinem k, plumper Fisch mit großem k) sei hier verzichtet. Auch die durchaus interessante Frage, wie sich die Autoren die experimentelle Messung des Energieverbrauchs eines Fisches vorstellen, wollen wir hier nur am Rande streifen. Nur: wenn die Aussage "Aus Experimenten weiß man" offenkundig gelogen ist, welcher Schüler soll Mathematik dann noch ernst nehmen?

Ganz nebenbei vermute ich auch, dass die Autoren hier Energie (in Joule) und Energieverbrauch (in Joule pro Sekunde) verwechselt haben. Das macht natürlich nichts aus, da es bei eingekleideten Aufgaben wie dieser auf die Einheit gar nicht ankommt; die Aufgabe würde sich nicht wesentlich ändern, wenn die Energie in Grad Celsius gemessen würde, schließlich geht es nur vordergründig um Energie oder Arbeit: im Grunde ist die einzig zu erbringende Leistung des Schülers die, dass man die Funktion ableitet und gleich 0 setzt.

Damit nicht genug: da die Konstante c von k gar nicht abhängen soll, fragt man sich verwundert, wie auf der linken Seite Joule herauskommen sollen, wenn auf der rechten Seite eine Konstante mal ein Ausdruck steht, der die Einheit m^{k-1}/s^{k-1} hat.

Ebensowenig kennen sich die Autoren mit Plausibilitätsbetrachtungen aus: Wenn unser Fisch hinreichend langsam schwimmt, dann wird er nämlich zum perpetuum mobile, das sogar noch Energie abgibt. Und wenn der Fisch mit 2 m/s schwimmt, verwandelt sich die Erde in ein schwarzes Loch und frisst den ganzen Lambacher-Schweizer auf. Man wird ja wohl noch träumen dürfen ...

11. Fazit

Für meine Seite kann ich nur einen Schluss ziehen:

Die Schulmathematik am Gymnasium ist zur Infantilimalrechnung verkommen.

Warum ein Land wie Deutschland mit einer jahrhundertelangen Lehr- und Unterrichtstradition, die von vielen Ländern kopiert wurde, sehenden Auges in das bildungspolitische Verderben rennt, ist nur schwer zu begreifen.

Vielleicht ist auch nicht mehr zu erwarten, wenn man den Prozentsatz der Gymnasiasten von 10 % auf 50 % aller Schüler erhöhen und dabei alle Schüler denselben Umfang an Mathematikunterricht durchleiden lassen möchte. Wenn man dieses Ziel allerdings damit bezahlt, dass das Niveau der Schulmathematik ins Bodenlose sinkt, dann sollten das zumindest diejenigen wissen, die künftig auf der Suche nach studierfähigen Schulabgängern sein werden.

Wer in 10 Jahren wieder Studenten haben möchte, die auch ein technisches oder gar physikalisches oder mathematisches Fach studieren können, muss dafür etwas tun[4]. Die einfachste Möglichkeit wäre die Gründung einer neuen Schulform, welche

[4] Klett hat 2012 ein Buch "Leistungskurs Mathematik" herausgebracht, das Schülern den Übergang zu einem naturwissenschaftlichen Studium ermöglichen soll. Offenbar ist dies mit dem Durchwursteln des G8-Lehrbuchs nicht der Fall. Nun ist Einsicht ja der erste Schritt zur Besserung – allerdings nur, wenn der zweite, in diesem Fall die Widereinführung des Leistungskurses, auch wirklich gemacht wird. Das Buch selbst ist übrigens nicht gerade ein Glanzlicht der modernen

die Rolle des früheren Gymnasiums übernimmt. Aber selbst in diesem Falle kommt man um eine Reform der Grundschule nicht herum; bei dieser Reform kann es nicht darum gehen, auch noch die letzten Reste der Grundfähigkeiten (Lesen, Rechnen, Schreiben) über Bord zu werfen, folglich darf diese Reform nicht den Didaktoren überlassen werden, die uns dahin geführt haben, wo wir jetzt stehen.

Vermutlich werden wir aber von der Praxis überrollt, und die sieht so aus, dass Universitäten eine Kollegstufe anbieten, auf denen künftigen Studenten der technischen und naturwissenschaftlichen Fächern der Stoff beigebracht wird, der in früheren Zeiten von studierfähigen Abiturienten beherrscht wurde. Bruchrechnen zum Beispiel.

Literatur

[HL] Heye-Lietzmann, *Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen*, Band 3^A, Teubner 1940

[LS11] *Lambacher Schweizer 11*, 1. Aufl. 2006

[LSA] *Lambacher Schweizer. Analysis*, Klett Verlag 1968

[LS3] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **3**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2005

[LS4] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **4**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2006

[LS5] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **5**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2007

[LS6] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **6**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2008

[LSK] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe*, Klett Verlag, 1. Aufl. 2009

[LSLK] *Lambacher Schweizer. Mathematik. Analysis Leistungskurs*, 1. Aufl. 2012

[Lan] N. P. Landsman, *Where have all the students gone?*, Nieuw Archief voor Wiskunde **9** (2008)

[Paf] Andrea Paffrath, *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*, `http://www.????`

Mathematikliteratur, wie man unschwer daran erkennen kann, dass der Differenzenquotient auf S. 12 eingeführt wird (über die bereits bekannten "Messergebnisse"), während der Grenzwert von Funktionen erst im allerletzten Kapitel auftaucht. Das ist, wie schon die Rechtschreibreform, eine Kapitulation vor denjenigen Schülern, deren Leistungen auch durch Verzicht auf Niveau nicht verbessert werden können.