

---

# Analogie, principe d'économie et complexité algorithmique

**Antoine Cornuéjols**

*Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI), UA 410 du CNRS*

*Équipe Inférence et Apprentissage*

*Université de Paris-sud, Orsay*

*Bâtiment 490, 91405 ORSAY (France)*

*email : antoine@lri.fr*

---

**RESUME :** Le raisonnement par analogie est un problème sous-contraint. Seule une hypothèse ou biais analogique supplémentaire peut le rendre possible.

Ce papier a pour but principal d'analyser quelle peuvent être la nature et les fondements de cette "hypothèse analogique" ou "biais analogique". Une formalisation, à la fois plus générale et plus fondamentale que celles qui ont été exposées jusqu'ici, est proposée. Elle part de l'hypothèse que le raisonnement par analogie fait appel à un principe d'économie, et que la théorie algorithmique de l'information (fondée sur la complexité de Kolmogorov) fournit un outil adéquat pour mesurer les coûts en jeu. Le biais analogique prend alors une forme à la fois intuitive et simple, mais d'une très grande généralité, l'idée principale étant que la meilleure analogie est celle qui minimise l'apport d'information nécessaire pour en rendre compte.

Le cadre théorique ainsi défini devrait permettre, d'une part, de comparer les approches et systèmes existants, et, d'autre part, de suggérer des voies possibles pour la conception de systèmes de raisonnement par analogie.

**MOTS-CLES** □ Analogie, biais, complexité algorithmique de Kolmogorov, principe du minimum de description (MDLP), théorie algorithmique de l'information.

---

## 1. Introduction

Le raisonnement par analogie qui, schématiquement, consiste à partir d'une paire  $\{x, f(x)\}$  pour extrapoler la valeur de  $f$ , inconnue par ailleurs, en  $y \neq x$  (encore est-ce bien souvent la valeur en  $y$  d'une fonction  $g$  "proche" de  $f$ ) semble un problème extraordinairement sous-contraint. Pourtant, à des problèmes d'analogie donnés, les sujets humains observés produisent généralement un ensemble très restreint de réponses, de mesure nulle par rapport à l'ensemble infini des réponses possibles, et, de plus, ils sont généralement en accord sur le classement des réponses proposées. Il existe donc un ensemble de contraintes supplémentaires qui rend possible le raisonnement par analogie, et cet ensemble paraît à peu près partagé par les sujets humains.

Ce papier a pour but principal d'analyser quelle peuvent être la nature et les fondements de cet ensemble de contraintes, que nous appellerons "*hypothèse analogique*" ou "*biais analogique*" par référence au biais inductif qui fonde le raisonnement inductif et qui fait l'objet de très nombreux travaux, en particulier en théorie de l'apprenabilité. Une formalisation, à la fois plus générale et plus fondamentale que celles qui ont été exposées jusqu'ici, est proposée. Le cadre théorique ainsi défini devrait permettre, d'une part, de

comparer les approches et systèmes existants, et, d'autre part, de suggérer des voies possibles pour la conception de systèmes de raisonnement par analogie.

Après que la section 2 ait fixé un certain nombre de concepts et de notations, la section 3 analyse la notion de proximité entre cas analogues et expose les bases d'un biais analogique. La section 4 illustre les principes ainsi définis sur des problèmes d'analogie à l'intérieur d'un monde jouet, mais suffisamment riche pour être démonstratif. La section 5 rapporte les observations faites sur les sujets humains en résolution d'analogie et propose, pour en rendre compte, un critère dérivé de ceux de la section 3. Pour conclure, la section 6 suggère des heuristiques qui pourraient permettre la mise en oeuvre des principes exposés.

## 2. Notations

Il est nécessaire pour la suite de la discussion d'adopter une formalisation de l'analogie. Nous reprenons une modélisation utilisée dans la majorité des travaux dans ce domaine (cf. [Coulon et. al.,90]), et qui semble assez générale pour rendre compte d'une grande variété d'analogies (métaphores, résolution de problèmes, etc.).

Dans la modélisation standard, le raisonnement analogique implique la rencontre de deux "objets" : l'un que l'on appelle la *source*, et l'autre, la *cible*, que l'on suppose incomplet, et dont on désire parfaire la description à l'aide de la source. Ainsi, par exemple, la description partielle des courants électriques dans un circuit pourrait être complétée à l'aide d'un rapprochement avec un circuit hydraulique comparable et plus complètement décrit. On identifie donc dans la cible la partie existante (notée  $S_C$  pour Situation Cible) et une partie manquante (notée  $R_C$  pour Résultat Cible). La plupart des travaux, et le nôtre à leur suite, font généralement l'hypothèse \_qui n'est pas mince\_ qu'il est possible d'isoler de même une situation source  $S_S$ , correspondant à la situation cible  $S_C$ , et le résultat source  $R_S$  qui a pour pendant hypothétique  $R_C$ . Finalement, c'est seulement si il existe une relation de dépendance (notée  $\square_S$ ) entre  $S_S$  et  $R_S$ , que l'on peut espérer calculer  $R_C$  à partir de  $S_C$ , par la découverte d'une relation de dépendance analogue  $\square_C$ . On obtient alors le schéma de la figure 1.



Figure 1 : Schéma général pour l'analogie. Un cas source, connu comme une paire  $(S_S, R_S)$  (Situation, Résultat)<sub>Source</sub>, est utilisé en tant que modèle ou indication pour la complétion d'un cas cible dans lequel la partie  $R_C$  (Résultat)<sub>Cible</sub> est manquante. La relation de dépendance  $\square_S$  entre  $R_S$  et  $S_S$  n'est souvent pas connue explicitement. Le raisonnement analogique impliquant d'ailleurs l'interprétation, donc le travail de redescription des parties  $S_S$ ,  $R_S$  et  $S_C$ , ainsi que la découverte d'une relation de dépendance  $\square_C$  "analogue" à  $\square_S$ .

Remarque : A la différence d'autres travaux, nous n'introduisons pas ici de relations de similarités entre les parties correspondantes des cas source et cas cible (entre  $S_S$  et  $S_C$  par exemple), car c'est précisément la relation analogique entre les deux cas qui fait l'objet de la section suivante.

### **3. L'hypothèse ou biais analogique**

#### **3.1 Le problème du fondement de l'analogie**

Le raisonnement analogique consiste à trouver une expression de la partie manquante de la cible  $R_C$  à partir de la connaissance d'un cas source et de la partie  $S_C$  du cas cible. En l'absence d'hypothèses supplémentaires, c'est là un problème sous-contraint :  $R_C$  ne pouvant se calculer comme une conséquence logique de  $S_S$ ,  $R_S$  et  $S_C$ . En un sens le problème des fondements de l'hypothèse analogique est le même que le problème des fondements de l'induction : pourquoi et comment tirer d'une information particulière des conséquences qui dépassent le cadre de ce qui est connu ? Dans les deux cas, il est important de mettre en évidence et d'analyser les présupposés qui permettent ce "bond" analogique ou inductif. Il devient ainsi possible de cerner les causes potentielles d'"erreur", tandis que la conception d'algorithmes peut s'en trouver facilitée, de la même manière que le développement de logiciel profite de l'existence de spécifications abstraites.

#### **3.2 Bref état de l'art**

Il est possible de distinguer essentiellement deux types d'approches ayant une incidence, directe ou non, sur le problème de l'hypothèse analogique. La première famille de travaux s'attaque directement au problème et s'occupe de trouver des critères normatifs, généralement sous la forme de conditions suffisantes, afin de transformer l'analogie en inférence logiquement valide. La seconde famille regroupe les recherches plus empiriques dont l'objet est la conception de systèmes de raisonnement par analogie. Il s'agit alors d'une approche constructive par laquelle s'exhibent des hypothèses analogiques en fonctionnement. Malheureusement, la plupart du temps, la nature de ces hypothèses reste opaque car non déclarative.

Les travaux de Davies & Russell (87) et de Russell (87,89) sont tout à fait représentatifs de la première catégorie. Observant que l'analogie n'est pas et ne peut être la recherche d'une preuve de  $T, S_C \vdash R_C$  (où  $T$  serait une théorie du domaine préexistante), ces chercheurs examinent à quelles conditions la donnée du cas source permettrait de ramener l'analogie à une telle recherche de preuve. Ils proposent une condition suffisante, appelée "condition de détermination", consistant à postuler l'existence d'une partition de l'espace des situations  $S_i$ , telle que toutes les situations d'une même partie déterminent le même résultat  $R_k$ . Il suffit alors de trouver un cas source appartenant à la même partition pour être capable, par simple recopie de la partie résultat, de compléter le cas cible.

Comme il est apparent ici, la faiblesse des approches normatives proposées jusqu'ici est d'imposer, par suite d'un formalisme logique trop étroit, un cadre très restrictif au

raisonnement analogique. Il est évident que la plupart des analogies produites par les sujets humains ne tombent pas dans la modélisation proposée par l'École de Berkeley-Stanford (Davies, Genesereth, Nilsson, Russell).

Dans la seconde catégorie de recherches, plus pragmatiques ([Falkenhainer et.al.,89], [Gentner,83], [Gentner et.al.,93], [Gick & Holyoak,80,83], [Greiner,88], [Holyoak & Thagard,89], [Keane,88,94], [Winston,80]), les cas sont généralement représentés comme des graphes conceptuels d'une sorte ou d'une autre, et il s'agit d'identifier dans la source le sous-graphe absent dans la cible et pertinent pour sa complétion, puis de le recopier et de l'adapter au sein de la structure représentant la cible. Le but de ces travaux étant de concevoir des systèmes opérationnels, capables éventuellement de modéliser le raisonnement humain, l'essentiel des efforts porte sur la recherche d'heuristiques permettant de rendre tractable la comparaison de sous-graphes. L'hypothèse sous-jacente est que la plausibilité et la valeur de l'analogie est d'autant plus grande que le degré de similarité entre la source et la cible est important. Cependant aucune justification autre que pragmatique n'est offerte pour justifier l'idée qu'une petite "distance", mesurée à l'aune de l'appariement de graphes, entre cas permet d'inférer des ressemblances supplémentaires. La plus grande faiblesse de ces approches est que leurs performances sont très dépendantes de la représentation des connaissances utilisée, qui reste très arbitraire malgré quelques travaux intéressants d'analyse plus systématique (par exemple [Bichindaritz & Séroussi,92], [Clement & Gentner,91], [Kedar-Cabelli,85], [Séroussi,94], [Veloso,94]).

### **3.3 Analogie et principe d'économie**

Nous proposons dans cette section de rendre compte de l'hypothèse analogique à partir d'un principe d'économie et d'un instrument de mesure : la complexité algorithmique. Nous procéderons en deux temps.

#### **1. Cas où la source et la cible sont complètement connues.**

Dans cette première étape, nous nous plaçons du *point de vue de l'évaluation* d'une analogie entre deux cas supposés parfaitement connus. Il est certainement tentant d'estimer la valeur de l'analogie à partir de la "proximité" entre la source et la cible. Généralement, cette proximité a été mesurée à partir d'une notion d'appariement de sous-graphes. Il est supposé que les cas sont représentés par des graphes conceptuels \_dont la définition est propre à chaque auteur\_, et la proximité entre cas est mesurée par un décompte, pondéré ou non, des arêtes et des sommets qui peuvent être mis en correspondance bijective entre les représentations des deux cas. L'idée sous-jacente, en fait l'hypothèse analogique, étant que plus la source et la cible peuvent être mises en bijection, plus il est licite d'extrapoler à l'une ce qui est connu de l'autre par "amplification" de la bijection. Il est à noter que la grandeur ainsi définie est symétrique et a le plus souvent les propriétés d'une distance.

Nous proposons d'utiliser un cadre plus général pour mesurer la proximité entre deux cas.

#### ***La théorie algorithmique de l'information.***

Les travaux fondateurs de Chaitin(87), Kolmogorov(65) et Solomonoff(64) ont renouvelé la notion d'information, jusque là définie par rapport à l'entropie d'une collection d'objets, en proposant une définition de l'information contenue dans un objet unique (considéré comme une chaîne de caractères), et en offrant ainsi le cadre d'une théorie de l'induction fondée sur

une formalisation précise du rasoir d'Occam (entre deux théories explicatives, mieux vaut choisir la plus simple).

Brièvement (pour un exposé détaillé de la théorie algorithmique de l'information, il est conseillé de se reporter à [Li & Vitanyi,93] ou à [Delahaye,94]), *l'information contenue dans un objet  $x$*  est assimilée à sa complexité algorithmique  $K(x)$  définie, à une constante additive près, comme la taille du plus petit programme permettant à une Machine Universelle de "produire" cet objet. On pourra de même définir la *complexité de l'objet  $y$  conditionné par l'objet  $x$* , comme étant la taille du plus petit programme qui, utilisant  $x$ , permet d'engendrer  $y$ . Il est évident que si  $x$  et  $y$  sont indépendants, c'est-à-dire sans corrélation aucune, alors  $K(y) = K(y | x)$ , autrement dit, la connaissance de  $x$  n'apporte aucune information sur  $y$ . Il est intéressant de pouvoir caractériser *l'information apportée par  $x$  pour  $y$* . Elle correspond à la formule :  $K(y : x) = K(y) - K(y | x)$ .

Afin de se donner tous les outils pertinents pour ce papier, il est utile de compléter cet aperçu par quelques mots sur la théorie de l'induction due à Solomonoff(64) et reprise et adaptée par Rissanen (89) et Wallace & Boulton (68). Solomonoff assimile le travail du scientifique observant le monde comme une séquence d'informations  $x$  à celui d'un compresseur d'information qui essaie de résumer le plus possible  $x$ , ce qu'il a déjà vu, en vue de prédire  $y$ , l'événement suivant. En effet, sous des hypothèses assez faibles (cf. [Li & Vitanyi,93,p.283]), il est possible de montrer qu'il est préférable de faire une prédiction en utilisant la ou les "théories" qui ont permis la plus grande compression d'information relative à  $x$ . Solomonoff utilisait la notion de complexité algorithmique définie pour des machines de Turing et ramenait toute tâche d'induction à l'extrapolation d'une séquence assez longue de caractères. Rissanen (89), Wallace & Boulton (68) adaptent cette approche au cas de la recherche d'une "explication", exprimée à l'aide d'une théorie du domaine prédéfinie, permettant de rendre compte au mieux d'un ensemble de données. Ils proposent le *Principe du Minimum de Longueur de Description (MDLP)* :

|| La meilleure explication ou théorie pour rendre compte des données d'observation est celle qui minimise la somme des longueurs, mesurées en bits, de :

- la description de la théorie, et
- des données codées à partir de la théorie.

Il existe une correspondance étroite entre le MDLP et l'approche bayésienne. En fait, si les longueurs de description des différentes hypothèses ou théories alternatives sont choisies correctement, les deux approches sont équivalentes et produisent comme meilleure hypothèse celle qui maximalise la probabilité a posteriori après observation des données.

Deux remarques sont à faire :

- La complexité algorithmique est générale et fondamentale. Cependant, elle ne décrit que l'aspect descriptionnel de l'information. D'autres mesures, telle celle de la profondeur logique de Bennett (voir [Delahaye,94]) qui prend en compte la complexité des calculs, sont également d'un grand intérêt.
- La complexité algorithmique souffre de ses liens avec les théorèmes d'indécidabilité de Gödel. La recherche d'un programme minimal pour produire un objet est en effet un problème NP-complet.

Proposition 1 :

La proximité entre la source et la cible est mesurée par la taille du programme minimal permettant de produire la cible à partir de la source :  $K(\text{cible} \mid \text{source})$ .

Cette proposition revient à dire qu'une analogie entre une source et une cible est d'autant meilleure que l'obtention de la cible à partir de la source requiert peu d'information supplémentaire (sous la forme du programme de transformation). Nous croyons cette proposition intuitivement satisfaisante. Elle a l'avantage d'être générale et de couvrir comme cas particulier les mesures de distance fondées sur l'appariement de graphes. Il faut noter que la mesure proposée n'est pas symétrique (en général  $K(y \mid x) \neq K(x \mid y)$ ). Il faut donc maintenir la distinction entre source et cible, c'est-à-dire tenir compte de la direction de l'analogie et du but poursuivi (voir la figure 2).

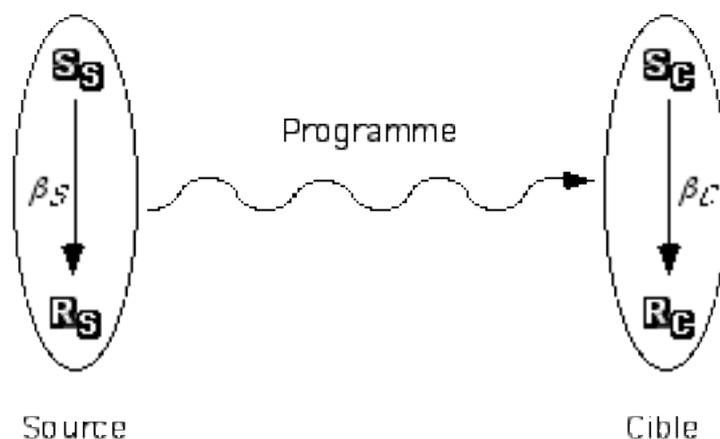


Figure 2. L'analogie entre la source et la cible est d'autant meilleure, c'est-à-dire fiable, que le programme minimal de transformation de l'une dans l'autre est court.

Cette proposition n'est cependant pas complètement satisfaisante car elle repose sur la programmation d'une machine de Turing \_quelque chose de peu séduisant en Intelligence Artificielle qui insiste sur le "symbol level" et l'existence d'une théorie du domaine\_, et ne rend pas compte, du moins explicitement, de la tâche d'interprétation [Hofstädter,85] ou de découverte du point de vue adéquat [Bourelly & Savelli,92], essentielle dans le processus de raisonnement par analogie. Nous faisons donc une proposition révisée dont le schéma se trouve sur la figure 3. Il s'agit de mettre en évidence le rôle de la perception dans l'analogie, c'est-à-dire du choix d'interprétation des données. (Ainsi, 'mi' se réfère-t-il à une note de musique ou à moitié comme dans mi-temps ?). C'est pourquoi nous introduisons  $M_S$  et  $M_C$  qui jouent le rôle de modèles ou de théories locales au cas source et au cas cible, et qui permettent leur description économique. Pour chacun des cas, on cherche donc à minimiser sa longueur totale de description selon le MDLP. Mais, la proposition 1 ci-dessus agit comme une autre contrainte sur le choix de  $M_S$  et de  $M_C$ : il faut que la transformation de  $M_S$  en  $M_C$  soit économique pour que l'analogie soit bonne. D'où la proposition révisée suivante.

Proposition 1 révisée :

La meilleure analogie entre un cas source et un cas cible est celle qui minimise :

$$K(M_S) + K(S_S | M_S) + K(\square_S | M_S) + K(M_C | M_S) + K(S_C | M_C) + K(\square_C | M_C) \quad (1)$$

Remarque 1 : Il faut voir que dans ce problème d'optimisation, les paramètres sont non seulement  $M_S$ ,  $M_C$ ,  $\square_S$  et  $\square_C$ , mais aussi les descriptions choisies de  $S_S$ ,  $R_S$ ,  $S_C$  et  $R_C$  qui doivent coïncider avec leur forme "littérale" supposée indépendante et présente devant l'agent évaluant l'analogie.

Remarque 2 : Nous faisons ici l'hypothèse qu'il existe une loi de dépendance  $\square_i$  entre  $S_i$  et  $R_i$  pour chaque cas, et c'est pourquoi il suffit de connaître  $S_i$  et  $\square_i$  pour en déduire  $R_i$ . Il n'y a donc pas à prendre en compte  $K(R_i)$  dans la formule.

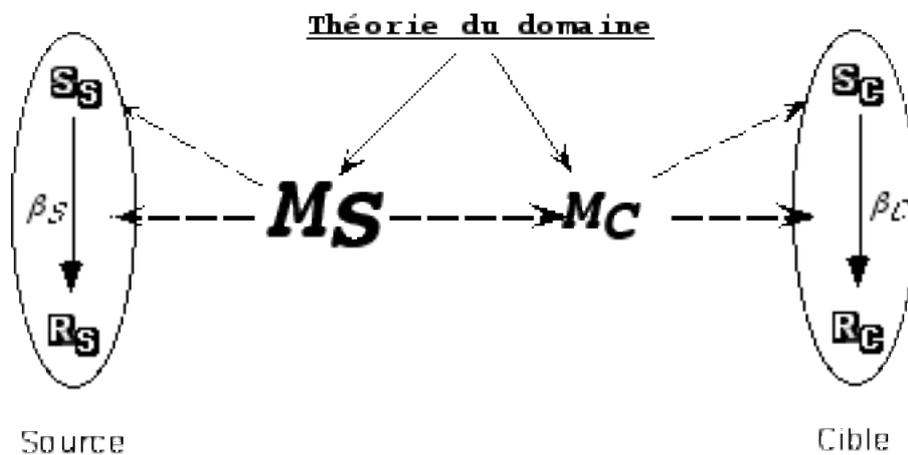


Figure 3. Chacun des deux cas est décrit à l'aide d'une théorie  $M$  qui lui est propre et met en relief des aspects choisis. Ces modèles, construits à partir de la théorie du domaine existante, correspondent aux interprétations sélectionnées pour percevoir les cas. La qualité de l'analogie est mesurée par la taille du programme minimal permettant la transformation de  $M_S$  en  $M_C$  ajoutée à la taille des descriptions de  $S_S$ ,  $\square_S$  d'une part, et de  $S_C$  et  $\square_C$  d'autre part, à partir, respectivement de  $M_S$  et  $M_C$ .

**2. Cas où la cible est incomplètement connue.**

L'agent qui tente de résoudre l'analogie cherche à estimer le terme  $R_C$  qui minimiserait la formule (1) ci-dessus. A la différence cependant de la tâche d'évaluation, le processus de résolution de l'analogie ne peut s'appuyer que sur les termes présents  $S_S$ ,  $R_S$  et  $S_C$ , le terme  $R_C$  étant une inconnue du problème. Il n'est donc plus possible de chercher à minimiser directement la formule (1) ci-dessus. Le problème est sous-contraint. Une nouvelle hypothèse supplémentaire doit être faite.

Nous proposons que cette contrainte supplémentaire correspond à l'hypothèse classique de validité d'extrapolation de la meilleure théorie disponible aux observations à venir. En d'autres termes, nous obtenons la proposition 2.

### Proposition 2 :

L'ensemble des modèles et descriptions  $M_S$ ,  $M_C$ ,  $\square_S$ ,  $S_S$  et  $S_C$  conduisant à la minimisation de la formule suivante :

$$K(M_S) + K(S_S | M_S) + K(\square_S | M_S) + K(M_C | M_S) + K(S_C | M_C) \quad (2)$$

sont aussi ceux qui permettent d'obtenir la relation  $\square_C$ , et donc le terme  $R_C$  le plus satisfaisant pour la formule (1).

Remarque : Il est évident que les paramètres  $M_S$ ,  $M_C$ ,  $\square_S$ ,  $S_S$  et  $S_C$  qui minimisent la formule (2) peuvent ne pas être ceux qui minimisent la formule (1) pour tout  $R_C$ . En d'autres termes, le minimum de la formule (2) peut ne pas coïncider avec le minimum de la formule (1). Mais l'agent qui résout l'analogie, c'est-à-dire cherche le  $R_C$  le meilleur, ne peut pas faire mieux que de postuler cette coïncidence des deux minima.

### 3.4 L'hypothèse ou biais analogique

Nous proposons donc que l'hypothèse analogique qui permet de résoudre le problème sous-contraint de l'établissement d'une analogie entre un cas source et un cas cible à compléter se décompose en deux parties :

1. **L'analogie, comme l'induction, met en oeuvre un principe d'économie.** La meilleure analogie entre deux cas est celle qui minimise la quantité d'information nécessaire à la dérivation de la source à partir de la cible. L'une des mesures les plus générales et les fondamentales est celle de la théorie de la complexité algorithmique. Nous proposons d'utiliser la formule (1) pour le calcul de la quantité d'information mise en jeu dans l'analogie.
2. Lors de la résolution ou complétion d'un cas cible incomplet à l'aide d'un cas source, **les paramètres qui assurent le minimum de la formule (2) sont postulés être ceux qui assurent aussi le minimum de la formule (1)**, et donc produire la meilleure réponse.

La section suivante a pour but d'illustrer cette discussion abstraite sur un problème simple, mais conservant l'essentiel des difficultés attachées au raisonnement par analogie.

## 4. Mise en oeuvre sur le problème d'Hofstädter

Nous avons choisi un micro-monde jouet proposé par Hofstädter(85) et détaillé dans la thèse de Mitchell(93) à propos du projet COPYCAT. Il est en effet facile de définir des primitives de représentation et des théories simples pour ce micro-monde, sans que cela se fasse aux dépens de la richesse et de la variété des expériences possibles.

### 4.1 Description du micro-monde des lettres

Les objets primitifs de ce micro-monde sont les 26 lettres de l'alphabet, mais l'ajout d'autres objets tels des nombres ou des formes géométriques serait immédiat. Les analogies étudiées consistent à chercher comment une chaîne de caractères (par exemple **ijjkk**) se transforme étant donné un cas source (par exemple la transformation **abc => abd**). Ce problème, réminiscent d'exercices favorisés des tests de QI, met en jeu l'identification des

aspects pertinents permettant de décrire les chaînes de caractères et leurs transformations supposées (est-ce que **abc** => **abd** parce que la dernière lettre est remplacée par un **d** ? Ou est-ce que la règle  $\sqsubset_S$  est de transformer tous les **c** par des **d** ?) ainsi que le transfert de la source vers la cible (comment percevoir **ijjkk** ?, et quelle est la règle  $\sqsubset_C$  adéquate ?).

## 4.2 Théorie du domaine et longueurs de description

La théorie du domaine qui permet de décrire les différents aspects des objets du monde inclut des primitives de représentation, ainsi que des structures de base. La table 1 ci-dessous fournit la liste de celles que nous avons définies pour ce travail.

• Descripteurs utilisés dans la définition des structures :	
- orientation (-> / <-)	1 bit
- cardinalité ou nombre d'éléments : n	$\log_2(n) + 1$ bits
- type d'éléments	(voir en-dessous)
- longueur : l	$\log_2(l) + 1$ bits
- commençant ou se terminant par l'élément = x	L(x) bits
• <b>Lettre</b>	(1/2) -> 1 bit
Une lettre particulière (e.g. 'd')	(1/2.26) -> 6 bits
• <b>Chaîne</b> (orientation, éléments)	(1/8) -> 3 bits
$L = 3 + L(\text{orientation}) + \sum L(\text{éléments})$	
e.g. $L('a3bd'$ avec orientation = ->) = $3 + 1 + \log_2((1/2.26)^3) + L(3)$	
$= 3 + 1 + 18 + 3 = 25$ bits	
• <b>Ensemble</b> (type d'éléments, cardinalité, éléments)	(1/8) -> 3 bits
$L = 3 + L(\text{type}) + L(\text{cardinalité}) + \sum L(\text{éléments})$	
• <b>Groupe</b> (type d'éléments, nombre d'éléments, éléments)	(1/8) -> 3 bits
$L = 3 + L(\text{type}) + L(\text{nb él.}) + \sum L(\text{éléments})$	
• <b>Séquence</b> (orientation, type d'éléments, loi de succession ou nombre d'éléments, longueur, commençant ou se terminant par)	(1/8)
$L = 3 + L(\text{orient.}) + L(\text{type}) + L(\text{loi})$ or $L(\text{nb él.}) + L(\text{long}) + L(\text{début/fin})$	
• Description et longueur d'une loi de <b>succession</b>	
$\text{succ}(\text{type-of-el.}, n, x)$ = le nième successeur de l'élément x du type type-of-el.	
$L = L(\text{type}) + L(n$ (voir ci-dessous)) + $L(x)$	
$L(n) = L(1/6)$	si n=1 ou -1 (1er successeur ou prédécesseur)
$L(1/3)$	si n=0 (même élément)
$L((1/3).(1/2)^p)$	sinon (avec p=n si n>0, p=-n sinon)
• Premier / Dernier (par rapport à l'orientation définie)	1 bit
• nième	n bits

Table 1 : Liste des primitives de représentation et de leur longueur de description associée.

Afin de pouvoir calculer les complexités algorithmiques associées aux formules définies dans la section 3, il est nécessaire de définir la longueur de description associée à chaque primitive de représentation. Le choix de ces longueurs est arbitraire et doit normalement refléter la connaissance a priori du domaine par l'agent. Il y a donc là une possibilité d'apprentissage et de test de divers biais correspondant à des contextes ou des connaissances différents. Certaines contraintes pèsent cependant sur ce choix. En effet, la longueur de description  $L$  associée à un concept doit idéalement correspondre à sa probabilité a priori  $P$ , par la formule  $L = -\log_2(P)$  (Ainsi par exemple, la longueur de description du concept de chaîne ci-dessous est de 3 bits car sa probabilité a priori est estimée à 1/8). Il est alors

impératif de respecter les contraintes du calcul des probabilités, c'est-à-dire en particulier que la somme des probabilités d'événements exhaustifs et mutuellement exclusifs égale 1.

Ainsi l'objet 'abc' pourrait être représenté par :

'abc' = <b>Chaîne</b>	(1/8)
orientation : ->	(1/2)
1er='A', 2ème='B', 3ème='C'	$(1/4.26)^3$
TOTAL (longueur) :	<b>21 bits</b>

ou bien par:

'abc' = <b>Ensemble</b>	(1/8)
{'A', 'B', 'C'}	$(1/4.26)^3$
TOTAL :	<b>20 bits</b>

ou encore par:

'abc' = <b>Séquence</b>	(1/8)
orientation : ->	(1/2)
type d'éléments = lettres	(1/2)
loi de succession :	
successeur(élt(lettre=x)) = élt(succ(lettre,1,x))	
$L(\text{lettre}) + L(\text{1er succ}) + L(x) = L(1/2 \cdot 1/6 \cdot 1)$	
= $1(1/12) = 4$ bits	
longueur = 3	3 bits
commençant avec l'élément(lettre='A')	(1/26)
TOTAL :	<b>17 bits</b>

Dans cet exemple, la dernière représentation est la plus économique alors même qu'elle décrit plus complètement la structure de 'abc' que par exemple la seconde description qui n'en retient que la perception d'un ensemble des trois lettres 'a', 'b' et 'c'.

### 4.3 Expériences

Les expériences réalisées manuellement ont consisté à prendre une série de tests avec différentes solutions exposées dans [Mitchell,93], ainsi que d'autres, et à calculer pour chaque problème et chaque solution proposée les valeurs de complexité algorithmique des formules (1) et (2) de la section 3. L'espace limité ne permet ni de fournir la liste exhaustive des essais réalisés, ni de donner le détail des calculs (se reporter à [Cornuéjols, 96, en préparation], [Khedoucci,94]).

Brièvement, la méthode est la suivante. Pour chaque problème (ex: **abc** => **abd** ; **iijjkk** => ?) et pour chaque solution proposée (ex: **iijjkk** => **iijjll**), la perception, et donc la description, associée sont conjecturées. Ainsi, par exemple, le modèle  $M_S$  ci-dessous correspond à la perception de l'objet 'abc' comme une séquence avec une loi de succession spécifique. Pour chacune des descriptions ainsi définies, les longueurs de description associées, suivant les formules (1) et (2) sont calculées. On peut alors comparer la valeur de chaque solution suivant les mesures définies en section 3.

$M_S$ = Séquence	3
orientation : ->	1
type d'éléments = lettres	1
loi de succession :	
succes.(élt(lettre=x) = élt(succ(lettre,1,x))	4
Dernier	1
TOTAL :	10 bits

Problème 1 :     **abc => abd ; iijjkk => ?**

Solution 1 : "*Remplacer groupe de droite par son successeur*"     **iijjkk => iijjll**

Solution 2 : "*Remplacer lettre de droite par son successeur*"     **iijjkk => iijjkl**

Solution 3 : "*Remplacer lettre de droite par D*"     **iijjkk => iijjkd**

Solution 4 : "*Remplacer 3ème lettre par son successeur*"     **iijjkk => iikjkk**

Solution 5 : "*Remplacer les C par D*"     **iijjkk => iijjkk**

Solution 6 : "*Remplacer groupe de droite par la lettre D*"     **iijjkk => iijjdd**

	P1;S1	P1;S2	P1;S3	P1;S4	P1;S5	P1;S6
$L(M_S)$	10	9	11	11	12	11
$L(S_S M_S)$	8	18	18	18	22	15
$L(\square_S M_S)$	4	4	3	7	8	3
$L(M_C M_S)$	5	0	0	0	0	17
$L(S_C M_C)$	8	36	36	36	42	15
$L(\square_C M_C)$	6	4	3	7	8	3
<b>Total-1 (bits)</b>	<b>41</b>	<b>71</b>	<b>71</b>	<b>79</b>	<b>93</b>	<b>65</b>
<b>Total-2 (bits)</b>	<b>35</b>	<b>67</b>	<b>68</b>	<b>72</b>	<b>85</b>	<b>62</b>
Rang	1	3	4	4	6	2
<b>Coût (bits)</b>	<b>19</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>20</b>	<b>31</b>
Rang	5	1	2	3	4	6

Table 2 : Les complexités associées aux formules (1) et (2) pour chaque solution du problème 1 sont reportées ici. On notera que, pour ce problème, les deux formules conduisent au même classement, et que l'analogie la meilleure, selon le principe d'économie défini, correspond à la solution 1, ce qui est confirmé par des expériences sur des sujets humains auxquels on demande de classer les solutions ci-dessus. La sous-table sur les "coûts" est expliquée dans la section 5.

Les résultats obtenus sur ces exemples montrent d'une part que le deuxième volet de l'hypothèse analogique *la coïncidence des optima des formules (1) et (2)* semble justifié dans de nombreux cas, au moins dans les cas simples étudiés ici. D'autre part, le classement des différentes solutions semble correspondre, au moins intuitivement, au classement privilégié par les sujets humains lorsqu'il leur est demandé d'évaluer la qualité des analogies (voir [Khedoucci,94],[Mitchell,93]). Cependant, en dehors des critères normatifs tels que ceux proposés dans ce papier pour définir leur qualité, l'évaluation des analogies est de nature subjective et mérite d'être étudiée de plus près.

## 5. Production d'analogies chez les sujets humains

Plusieurs auteurs ont rapporté ([Forbus et.al.,95], [Khedoucci,94]), et il est aisé d'en obtenir confirmation, que les sujets humains ont tendance à ne pas produire, en général, les mêmes analogies que celles qu'ils jugent les meilleures quand elles leur sont présentées. Forbus et.al.(95) suggèrent qu'il s'agit là de la mise en évidence d'une différence de processus mis en jeu; la production d'analogie favorisant, pour des raisons de moindre coût calculatoire, le traitement des similarités de surface, tandis que l'évaluation des analogies, étape non obligatoire dans la production, favoriserait la comparaison des similarités profondes entre cas.

Nous proposons une autre conjecture, liée aux critères définis dans ce papier et suggérée par l'analyse introspective lors de la résolution de problèmes d'analogie dans le micro-monde des lettres. Lorsqu'en effet, pour le problème ( $abc \Rightarrow abd$  ;  $aababc \Rightarrow ?$ ), nous choisissons la solution ( $aababc \Rightarrow aababd$ ), il nous semble que nous choisissons alors d'ignorer une partie des situations  $S_S$  ou  $S_C$  qui sont présents devant nous (la partie  $aab$  de  $aababc$ ), car il ne sera pas difficile de *recopier* le reste de ces objets pour obtenir  $R_S$  ou  $R_C$ . Dans ces conditions, seuls les coûts liés à l'interprétation des cas, et à la transformation d'une interprétation dans l'autre sont à prendre en compte, les coûts de dérivation des objets n'ayant pas à être "payés" par l'agent. En revanche, lors de l'évaluation d'une analogie, l'agent se mettrait en situation de scientifique qui évalue la capacité d'une théorie à rendre compte de toutes les observations. Il appliquerait alors la formule (1) de la section 3, et préférerait la solution  $aababc \Rightarrow aababcd$ .

C'est pourquoi, pour rendre compte du mode de résolution des agents cognitifs, soumis à des contraintes de coût calculatoire, nous faisons la proposition suivante.

### Proposition 3 :

*En mode de résolution d'analogie, l'agent cognitif peut se contenter de minimiser l'apport d'information nécessaire à l'interprétation de la source et de la cible, sans prendre en compte le coût de la reproduction des données. Il peut donc préférer à la minimisation de la formule (2), la minimisation de la formule simplifiée suivante :*

$$K(M_S) + K(\square_S | M_S) + K(M_C | M_S) \quad (3)$$

La table 2 donne les coûts ainsi calculés pour les diverses solutions au problème 1. Le classement résultant est alors conforme à celui obtenu en faisant des statistiques sur les solutions des sujets humains testés. On notera de plus que dans le contexte de la formule (3), il devient désavantageux de choisir une interprétation expliquant la structure profonde des cas, plus coûteuse que des interprétations ne rendant compte que des aspects de surface. On retrouve alors naturellement les conjectures émises dans [Forbus et. al.,95].

Il est évident qu'il ne s'agit pas là d'une démonstration et qu'une analyse plus poussée avec comparaison sur les expériences faites en particulier par Forbus et ses collègues doit être menée avec soin.

## 6. Conclusions

L'analogie, comme l'induction, est une inférence sous-contrainte. Pour en rendre compte et la justifier, il faut introduire une hypothèse fondamentale. Descartes justifiait l'induction par l'existence de Dieu garant d'une "continuité" sur laquelle s'appuyer. Hume faisait appel à l'habitude de la répétition. Pour ce qui concerne l'analogie, les théoriciens ont proposé des critères normatifs ramenant l'induction à une déduction, les empiristes ont conçu des programmes implémentant diverses hypothèses. Ce papier propose que l'analogie soit fondée sur un principe d'économie, dont la formulation à l'aide de la théorie de la complexité algorithmique, est plus large que les critères normatifs suggérés jusqu'ici, et plus fondamentale que les heuristiques pragmatiques implémentées. L'hypothèse analogique serait constituée de deux volets. D'une part, la meilleure analogie est celle qui minimise l'apport d'information pour en rendre compte, et, d'autre part, lors de la production d'analogie, il est postulé que le minimum d'apport d'information correspondant aux données disponibles coïncide avec le minimum obtainable pour l'analogie complète. La section 5 montre qu'il est également envisageable de rendre compte, par une version de ce principe d'économie, des productions d'analogie par des sujets humains sous contrainte de ressources calculatoires.

La formulation ainsi proposée offre la possibilité de rendre compte des effets de contexte et d'apprentissage, par modification des longueurs de description associées aux primitives de représentation. Peut-elle conduire à une mise en oeuvre pratique ?

La recherche d'une théorie optimale est, nous l'avons souligné, un problème NP-complet. En supposant l'existence d'un générateur automatique de solutions, il faut donc trouver des heuristiques permettant de guider la recherche vers les solutions satisfaisantes. Nous conjecturons que la notion du "niveau de base" introduite par les psychologues offre une voie intéressante.

Le niveau de base ([Cordier,93][Lakoff,87]) serait celui des concepts appris en premier par les enfants et favorisés dans la communication entre sujets humains. Ainsi, le concept de 'chien' est généralement privilégié par rapport aux concepts de 'mammifère' (sur-classe) ou de 'labrador' (sous-classe). Nous faisons la conjecture que ce niveau est celui qui correspond à une optimisation du critère de complexité : il serait plus économique de communiquer à ce niveau qu'en utilisant un niveau trop général ou trop spécifique. Cela suggère alors l'heuristique suivante : dans la recherche de la meilleure analogie, c'est-à-dire des concepts qui optimisent les formules de complexité proposées, il faut examiner en priorité les analogies exprimées à partir de concepts du niveau de base, ce sont celles qui ont le plus de chances d'être les plus économiques. Ainsi, dans le micro-monde des lettres, il est préférable de se concentrer sur les analogies exprimées à l'aide des concepts de *lettre* ou de *séquence*, et non des primitives '*A*' (trop spécifique) ou de *chaîne* (trop générale). Cette idée reste essentiellement à explorer.

## **Bibliographie :**

- BICHINDARITZ I. & SEROUSSI B.** (1992) : Contraindre l'analogie par la causalité. *Techniques et science informatiques*, 11:4:69-98.
- BOURELLY L. & SAVELLI J.** (1992) : A propos des ambiguïtés du raisonnement analogique. *Techniques et science informatique*, vol.11, n°6,39-65,1992.
- CHAITIN G.** (1987) : Information, Randomness and Incompleteness - Papers on Algorithmic Information Theory. World Scientific Press, 1987.
- CLEMENT C.A. & GENTNER D.** (1991) : Systematicity as a Selectional Constraint in Analogical mapping. *Cognitive Science* 15, pp.89-132.
- CORDIER F.** (1993) : Les représentations cognitives privilégiées : typicalité et niveau de base. Presses Universitaires de Lille, 1993.
- CORNUEJOLS A.** (1996) : Analogie, principe d'économie et complexité algorithmique : les détails. L.R.I. rapport interne (en préparation).
- COULON, BOISVIEUX, BOURELLY, BRUNEAU, CHOURAQUI, DAVID, LU, PY, SAVELLI, VRAIN** (1990): Le raisonnement par analogie en intelligence artificielle : formalisation, applications. *Actes des 3<sup>o</sup> journées nationales PRC-GDR Intelligence artificielle*, Paris, 5-7 mars 1990, pp.45-88.
- DAVIES & RUSSELL** (1987) : A Logical Approach to Reasoning by Analogy. In Proc. of the 10th Int..Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI-87), Milano, 1987, pp.264-270.
- DELAHAYE J-P.** (1994) : Information, complexité et hasard. Hermès, 1994.
- FALKENHAINER B., FORBUS K.D. & GENTNER D.** (1989) : Structure-mapping engine. *Artificial Intelligence*, 41, 1-63, 1989.
- FORBUS K., GENTNER D. & LAW K** (1983) : MAC/FAC: A Model of Similarity-based Retrieval. *Cognitive Science*, 19, 1995, 141-205.
- GENTNER D., RATTERMANN M.J. & FORBUS K.D.** (1993) : The roles of similarity in transfer. *Cognitive Psychology*, 25, 524-575, 1993.
- GICK M.L. & HOLYOAK K.J.** (1980) : Analogical Problem Solving. *Cognitive Psychology*, vol.15, 1980.
- GICK M.L. & HOLYOAK K.J.** (1983) Schema Induction and Analogical transfer. *Cognitive Psychology* 15, pp.1-38.
- GREINER R.** (1988) : Learning by Understanding Analogies. *Artificial Intelligence* 35:81-125, 1988.
- HOFSTÄDTER D.**(1985) : Methamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern. Basic Books, 1985. See chapter 24 : "Analogies and Roles In Human and Machine Thinking", pp.547-603.

- HOLYOAK K. & THAGARD P.** (1989) : Analogical Mapping by Constraint Satisfaction. *Cognitive Science* 13:295-355, 1989.
- KEANE M.T.** (1988) : Analogical mechanisms. *Artificial Intelligence Rev.* (1988) 2:229-250.
- KEANE M.T.** (1994) : Constraints on Analogical Mapping: A Comparison of Three Models. *Cognitive Science*, 18:387-438, 1994.
- KEDAR-CABELLI S.T.** (1985) : Purpose-directed Analogy. In Proc. of the *Cognitive Science Society Conference*, 1985.
- KHEDOUCCI H.** (1994) : La symétrie en raisonnement analogique et son impact sur le CBR. Mémoire de DEA, L.R.I., Université d'Orsay, France, June 1994.
- KOLMOGOROV A. N.** (1965) : Three approaches to the quantitative definition of information. *Problems Inform. Transmission*, 1(1) : 1-7, 1965.
- LAKOFF G.** (1987) : Women, Fire, and Dangerous Things. What Categories Reveal about the Mind. The University of Chicago Press, 1987.
- LI M. & VITANYI P.** (1993) : An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications. Springer Verlag, Texts and Monographs in Computer Science, 1993.
- MITCHELL M.** (1993) : Analogy-Making as Perception. MIT Press, 1993.
- PEDNAULT E.** (1994) (Ed.) : *Proc. of the Workshop on "Applications of minimal complexity principles"*, International Conf. on Mach. Learning (ICML-94), Rutgers University, NJ, USA, July 10, 1994.
- RISSANEN J.** (1989) : Stochastic Complexity and Statistical Inquiry. World Scientific Publishing Company, 1989.
- RUSSELL S.** (1987) : Analogy and Single-Instance Generalization. In Proc. of the *Fourth International Workshop on Machine Learning (IWML-87)*. University of California, Irvine, June 22-25, 1987.
- RUSSELL S.** (1989) : The Use of Knowledge in Analogy and Induction. Pitman Publishing and Morgan Kaufmann, 1989.
- SEROUSSI B.** (1994) : Problem-solving expertise acquisition : a computational model. *Revue d'Intelligence Artificielle*.
- SOLOMONOFF R.** (1964) : A formal theory of inductive inference. *Information and Control*, 7, 1-22 & 224-254, 1964.
- VELOSO Manuela M.** (1994) : Planning and Learning by Analogical Reasoning. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 886. Springer-Verlag, 1994.
- WALLACE C. & BOULTON D.** (1968) : An Information measure for classification. *Computing Journal*, 11:185-195, 1968.
- WINSTON P.H.** (1980) : Learning and Reasoning by Analogy. *Com.. ACM*, vol.23, 1980.