Письма в ЖЭТФ, том 13, стр. 452 – 455 *20 апреля 1971 г.*

РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ ГЕНЕРАТОРОВ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ И НАРУШЕНИЕ P-ИНВАРИАНТНОСТИ

Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман

Одним из основных требований, накладываемых на квантовую теорию поля, является требование инвариантности теории относительно группы Пуанкаре [1]. Однако, лишь некоторая часть взаимодействий, удовлетворяющих этому требованию, осуществляется в природе. Возможно, что эти взаимодействия, в отличие от других, обладают более высокой степенью симметрии. Поэтому представляет интерес изучение различных алгебр и групп, инвариантность относительно которых накладывает ограничения на форму взаимодействия элементарных частиц. В настоящей работе при построении гамильтоновой формулировки квантовой теории поля предлагается положить в основу специальную алгебру $\mathcal{R}$, являющуюся расширением алгебры $\mathcal{P}$ генераторов группы Пуанкаре. Целью работы является нахождение такой реализации алгебры R, в которой оператор Гамильтона описывает взаимодействие квантованных полей.

Расширение алгебры $\mathcal{P}$ производится следующим образом: к генераторам P_μ и $M_{\mu\nu}$ добавляются биспинорные генераторы W_α и $\overline{W}_\beta$, которые мы будем называть генераторами спинорных трансляций. Чтобы получить алгебру R, необходимо найти лоренцинвариантный вид перестановочных соотношений между генераторами трансляций. Чтобы в дальнейшем не нарушить связь спина со статистикой, мы будем рассматривать антикоммутаторы операторов W_α и $\overline{W}_\beta$. Обобщение тождеств Якоби накладывает жесткие ограничения на вид возможных перестановочных соотношений между операторами алгебры. Мы ограничимся рассмотрением лишь тех алгебр R, у которых нет подалгебр Q таких, что $\mathcal{P} \subset Q$ и $\mathcal{P} \neq Q$. Этот выбор обусловлен тем, что остальные алгебры R получаются путем дальнейшего расширения алгебр R, причем соответствующие им теории поля будут обладать еще более высокой степенью симметрии.

Исследование алгебр R показало, что при пространственной инверсии они не переходят сами в себя ни при каком выборе структурных констант алгебры. Вследствие этого в теории поля, инвариантной относительно такой алгебры, четность должна не сохраняться[1], причем форма несохранения полностью определяется самой алгеброй. Мы остановимся на одной из алгебр R:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\lambda}]_- = i(\delta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda}); \quad [P_\mu, P_\nu]_- = 0;$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda]_- = i(\delta_{\mu\lambda}P_\nu - \delta_{\nu\lambda}P_\mu); \quad [M_{\mu\nu}, W]_- = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- W; \quad \overline{W} = W^+\gamma_0. \tag{1а}$$

$$[W_\pm, \overline{W}]_+ = \overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu; \quad [W, W]_+ = 0; \quad [P_\mu, W]_- = 0, \tag{1б}$$

где $\overset{\pm}{\gamma}_\mu = \overset{\pm}{s}\gamma_\mu$; $\overset{\pm}{s} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$; $\gamma_5^2 = 1$, спинорные индексы опущены, а выражение типа $d_\mu d_\mu$ здесь и далее равно $d_0 d_0 - d_1 d_1 - d_2 d_2 - d_3 d_3$.

Неприводимые представления алгебры (1) можно редуцировать по неприводимым представлениям ее подалгебры $\mathcal{P}$[2]. Физически интересен такой случай, когда редукция производится по представленям $\mathcal{P}$, характеризуемым массой и спином. В простейшем неприводимом представлении такого сорта оператор W° (индекс "$_\circ$" означает, что оператор билинеен по операторам поля) имеет следующий вид:

$$W^\circ = \overset{+}{s}W^\circ = \frac{1}{i}\int d_x^3 (\phi^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \overset{+}{s}\psi_1(x) + \omega(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \overset{+}{s}\psi_1^c(x)), \tag{2}$$

где $\phi(x)$ и $\omega(x)$ – скалярные эрмитовы поля, $\psi_1(x)$ – спинорное поле, а индекс "с" означает зарядовое сопряжение. Масса всех полей одина-

[1,2] Более подробному разбору этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

кова и равна m. Операторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ имеют свой обычный вид в отсутствии взаимодействия. В другом неприводимом представлении содержатся эрмитово скалярное поле $\chi(x)$ и поперечное эрмитово векторное поле $A_\mu(x)$, а также спинорное поле $\psi_2(x)$. Масса μ этих полей также одинакова. Генератор спинорных трансляций в этом представлении записывается таким образом:

$$W^\circ = \overset{+}{s}W^\circ = \frac{1}{i\sqrt{2}} \int d^3x \left(\chi(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \overset{+}{s} \psi_2(x) + A_\mu(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \overset{+}{\gamma_\mu} \psi_2(x)\right). \qquad (3)$$

Чтобы убедиться в справедливости формул (2) и (3), достаточно подставить их в алгебру (1) и произвести соответствующие вычисления, в процессе которых необходимо использовать уравнения движения и перестановочные соотношения для свободных полей.

Перейдем теперь к описанию взаимодействия полей на основе алгебры (1). Как видно из соотношений (1б), оператор P_μ не только коммутирует с W, но и стоит в правой части перестановочных соотношений. Поэтому, если оператор W равен W°, т. е. билинеен по операторам поля, то и оператор $P_\mu = P^\circ_\mu$ билинеен по операторам поля. Другими словами, оператор $W^I = W - W^\circ$ и $H^I = H - H^\circ (H = P_0)$ либо одновременно равны нулю (и мы получаем теорию свободных полей, либо не равны нулю (и мы имеем дело с теорией взаимодействующих полей). Таким образом, при описании взаимодействия полей необходимо воспользоваться такими представлениями (1), в которых оператор W^I, как и оператор H^I, выражается через произведения полей более высокой степени, чем операторы W° и H°. Такие представления (1) удобно искать по теории возмущений в представлении взаимодействия. Для этого разложим операторы

$W^\circ + W^I(t)$ и $H^\circ + H^I(t)$ в ряд по константе связи g:

$$W^\circ + W^I(t) = W^\circ + gW_1(t) + g^2W_2(t) + g^3W_3(t) + \ldots \quad ;$$
$$H^\circ + H^I(t) = H^\circ + gH_1(t) + g^2H_2(t) + g^3H_3(t) + \ldots \quad , \qquad (4)$$

и подставим (4) в последнее соотношение (1б):

$$[W^\circ, H_1(t)]_- + [W_1(t), H^\circ]_- = 0;$$
$$[W^\circ, H_2(t)]_- + [W_1(t), H_1(t)]_+ + [W_2(t), H^\circ]_- = 0; \qquad (5)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

Разрешая i-ое уравнение (5) относительно оператора $W_i(t)$, получим:

$$W_1(t) = i\int_{-\infty}^{t} [W^\circ; H_1(\tau)]_- d\tau;$$
$$W_2(t) = i\int_{-\infty}^{t} ([W^\circ; H_2(\tau)]_- + [W_1(\tau), H_1(\tau)]_-) d\tau; \qquad (6)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

Добавки в орбитальную часть оператора $M_{\mu\nu}$ можно вычислить аналогичным образом. Прямой подстановкой (6) в (1) нетрудно убедиться, что соотношения (6) определяют представления (1) при произвольном гамильтониане взаимодействия. Однако, при произвольной локальной плотности гамильтониана $H^I(t)$ плотность оператора $W^I(t)$ не будет, вообще говоря, локальной за счет интегрирования в (6) по времени. Поэтому, чтобы получить физические следствия, мы обобщим понятия инвариантности теории относительно алгебры (или группы) на случай, когда операторы алгебры сами могут существенным образом зависеть от взаимодействия. Мы будем требовать, чтобы пространственная плотность операторов алгебры была локальной функцией от операторов поля [1]. В результате этого требования подинтегральные выражения в (6) должны быть полными производными по времени, и соотношения (6) превращаются в уравнения для определения операторов $H^I(t)$ и $W^I(t)$.

Уравнения (6) сводятся к системе линейных однородных уравнений для постоянных коэффициентов, которые вводятся в качестве неопределенных констант связи в наиболее общий вид гамильтониана взаимодействия. Эту систему уравнений удалось решить в случае, когда $H_1(t)$ является произведением трех полей, два из которых преобразуются по представлению (2) и комплексно-сопряженному (2), а третье – по представлению (3). Система уравнений (6) в этом случае имеет единственное решение, а отличны от нуля лишь операторы $W_1(t)$, $H_1(t)$, $H_2(t)$. Зная точный вид гамильтониана в представлении взаимодействия, можно восстановить по нему лагранжиан в гейзенберговском представлении:

$$
\begin{aligned}
L(x) = {} & (\partial_a \phi^* - igA_a\phi^*)(\partial_a\phi + igA_a\phi) - m^2\phi^*\phi + (\partial_a\omega^* - igA_a\omega^*) \times \\
& \times (\partial_a\omega + igA_a\omega) - m^2\omega^*\omega + \frac{i}{2}\psi_1\gamma_a\overleftrightarrow{\partial}_a\psi_1 - m\bar{\psi}_1\psi_1 - g\psi_1\gamma_a\psi_1 A_a + \\
& + \frac{i}{2}\bar{\psi}_2\gamma_a\overleftrightarrow{\partial}_a\psi_2 - \mu\bar{\psi}_2\psi_2 - \frac{1}{2}(\partial_\beta A_a)^2 + \frac{\mu^2}{2}A_aA_a + \frac{1}{2}(\partial_a\chi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\chi^2 + \\
& + g\mu(\phi^*\phi - \omega\omega^*)\chi - \frac{g^2}{2}(\phi^*\phi - \omega^*\omega)^2 + \sqrt{2}g(\bar{\phi}_1\bar{s}\psi_2\phi + \bar{\psi}_2\overset{+}{s}\psi_1\phi^*) - \\
& - \sqrt{2}g(\psi_1^c\bar{s}\psi_2\omega^* + \bar{\psi}_2\bar{s}\psi_1^c\omega) . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Таким образом, получена модель взаимодействия квантованных полей с несохранением четности, инвариантная относительно алгебры (1).

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 марта 1971 г.

Литература

[1] С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИЛ, 1963.

---

[1] Обоснованию этого постулата, а также сравнению его с обычной формулировкой требования инвариантности теории относительно группы преобразований будет посвящена отдельная работа.